PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

Cum Veteres Mechanicam (*uti Author est* Pappus) *in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint, & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu* Mathesin *excolere quatenus ea ad* Philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres constituerunt:* Rationalem *quæ per Demonstrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq;* Mechanica *nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas describere* Geometria *non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica.* Ex Mechanica *postulatur horum solutio, in* Geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam* Mechanicæ universalis *pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem,* Mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo sensu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunq; resultant, & virium quæ ad motus quoscunq; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deq; potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elasticam, resistentiam*

tiam

tiam Fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et ea propter hæc nostra tanquam Philosophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a Phænomenis motuum investigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant Propositiones generales quas Libro primo & secundo pertractavimus. In Libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cælestibus, per Propositiones in Libris prioribus Mathematice demonstratas, derivantur vires gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuo impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philosophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic posita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, sed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a me figuram Orbium cælestium impetraverat, rogare non destitit ut eandem cum Societate Regali communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At postquam Motuum Lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cæpissem quæ ad leges & mensuras Gravitatis & aliarum virium, ad figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in Mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares spectant, (imperfecta cum sint,) in Corollariis Propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum Propositionum interrumpere. Nonnulla sero inventa locis minus idoneis inserere malui, quam numerum Propositionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, enixe rogo.

IN

IN
VIRI PRÆSTANTISSIMI
D. ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE
MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentisque nostræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus atque Jovis; quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens Leges violare Creator
Noluit, æternique operis fundamina fixit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet ~~extremos quæ Vis circumrotat Orbes.~~
Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula Gyris.
Jam patet horrificis quæ sit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phænomena Astri.
Discimus hinc tandem qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Discimus & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellit, dum fractis fluctibus Ulvam
Algam

Deserit

Deſerit, ac Nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere Sophorum,
Quæque Scholas fruſtra rauco certamine vexant
Obvia conſpicimus nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error
Queis Superum penetrare domos atque ardua Cœli
Scandere ſublimis Genii conceſſit acumen.
  Surgite Mortales, terrenas mittite curas
Atque hinc cœligenæ vires dignoſcite Mentis
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit Tabulis compeſcere Cædes
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Autor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab Uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere Voces;
Humanam ſortem minus extulit; utpote pauca
Reſpiciens miſeræ ſolummodo commoda vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cœcæ
Clauſtra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſæcula mundi.
  Talia monſtrantem mecum celebrate Camænis,
Vos qui cœleſti gaudetis nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia Veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit Numine mentem:
Nec fas eſt propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PHIL

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AEr duplo denſior in duplo ſpatio quadruplus eſt. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunq; diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſq; pondus. Nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

Def. II.

Quantitas motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis, adeoq; in corpore duplo majore æquali cum Velocitate duplus eſt, et dupla cum Velocitate quadruplus.

Def. III.

Materiæ vis inſita eſt potentia reſiſtendi, qua corpus unumquodq;, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc ſemper proportionalis eſt ſuo corpori, neq; differt quicquam ab inertia Maſſæ, niſi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit ut corpus omne de ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis inſita nomine ſignificantiſſimo vis inertiæ dici poſſit. Exercet vero corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatus ſui per vim aliam in ſe impreſſam facta, eſtq; exercitium ejus ſub diverſo reſpectu et Reſiſtentia et Impetus: Reſiſtentia quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; Impetus quatenus corpus idem, vi reſiſtentis obſtaculi difficulter cedendo, conatur ſtatum ejus mutare. Vulgus Reſiſtentiam quieſcentibus et Impetum moventibus tribuit; ſed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem, neq; ſemper vere quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur.

Def. IV.

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neq; poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam

vim

vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

Def. V.

Vis centripeta est qua corpus versus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunq; tendit.

Hujus generis est gravitas, qua corpus tendit ad centrum Terræ: Vis magnetica, qua ferrum petit centrum Magnetis, et vis illa, quæcunq; sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Est autem vis centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix et motrix.

Def. VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Uti virtus Magnetica major in uno magnete, minor in alio.

Def. VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus Magnetis ejusdem major in minori Distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in Vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium (ut experimento pendulorum constat) atq; adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a Terra; in æqualibus autem distantiis eadem undiq; propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Def. VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inq; corpore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc vis est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum & (ut ita dicam) pondus, & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires absolutas, acceleratrices & motrices, & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium: Nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex propensionibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis Magneticæ vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus saltem est hic conceptus. Nam virium causas & sedes physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem Materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta Superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritq; semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulsus vel propensionis cujuscunq; in centrum, indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed Mathematice tantum considerando

rando. Unde caveat lector ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere et phyſice tribuere, ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo in ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſunt, explicare viſum eſt. Nam tempus, ſpatium, locum et motum ut omnibus notiſſima non definio. Dicam tamen quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipit. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, Mathematicas et vulgares diſtingui.

I. Tempus abſolutum verum & Mathematicum, in ſe & natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio; relativum apparens & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura, (ſeu accurata ſeu ~~inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis~~ utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium abſolutum natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis ſemper manet ſimilare & immobile; relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cæleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine, ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, movetur, ſpatium Aeris noſtri quod relative & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus, & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtq; pro ratione

tione spatii vel absolutus vel relativus. Partem dico spatii, non situm corporis vel superficiem ambientem. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de ipsius loco eadem cum summa translationum partium de locis suis, adeoq; locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in Navi quæ velis passis fertur, relativus corporis locus est navis regio illa in qua corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum Navi: & Quies relativa est permansio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At Quies vera est permansio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua Navis ipsa una cum cavitate sua & contentis universis movetur. Unde si Terra vere quiescit, corpus quod relative quiescit in Navi, movebitur vere et absolute ea cum Velocitate qua Navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur, orietur verus et absolutus corporis motus partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex Navis motu relativo in Terra: et si corpus etiam movetur relative in Navi, orietur verus ejus motus partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum Navis in Terra, tum corporis in Navi, et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa ubi Navis versatur moveatur vere in Orientem, cum Velocitate partium 10010, et velis ventoq; feratur Navis in Occidentem cum Velocitate partium decem, Nauta autem ambulet in Navi Orientem versus cum Velocitatis parte una, movebitur Nauta vere et absolute in spatio immoto cum Velocitatis partibus 10001 in Orientem, et relative in Terra Occidentem versus cum Velocitatis partibus novem.

Tempus abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per Æquationem Temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro Menſura Temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi ut ex veriore Tempore menſurent motus cæleſtes. Poſſibile eſt ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus Temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli; proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii oſcillatorii, tum etiam per Eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam Tempora & Spatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum Eſſentia eſt ut ſint loca, & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta loca, & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti motus.

Verum quoniam hæ ſpatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui, earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa; deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſq; referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per eorum proprietates, cauſas & effectus. Quietis proprietas

eſt

eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoq; cum poſſibile ſit ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, utrum horum aliquod ad longinquum illud datam poſitionem ſervet, quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus proprietas eſt, quod partes quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Igitur motis corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quieſcunt. Et propterea motus verus et abſolutus definiri nequit per tranſlationem e vicinia corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam vere quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros, et ſublata illa tranſlatione non vere quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur.; Sunt enim ambientia ad incluſa ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, abſq; tranſlatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto loco movetur una locatum, adeoq; corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Igitur motus omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum et abſolutorum, et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, et motu loci hujus de loco ſuo, et ſic deinceps, uſq; dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri et abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt, et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli: Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant

vant

vant positiones ad invicem, atq; adeo semper manent immota, spatiumq; constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas : at motus relativus generari et mutari potest absq; viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut ijs cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursus motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur, at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in qua motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur ; et propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturq; perpetuo in orbem donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aqua, et una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu : superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis, at postquam, vi in aquam paulatim impressa, effecit vas, ut hæc quoq; sensibiliter revolvi incipiat, recedet ipsa paulatim e medio, ascendetq; ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) et incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuiq; relativo hic

C

omni-

omnino contrarius. Initio ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Poſtea vero ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe, atq; hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Igitur conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſq; revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens; motus autem relativi pro varijs relationibus ad externa innumeri ſunt, & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus de vero illo & unico motu participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cælos noſtros infra Cælos fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; Planetæ & ſingulæ Cælorum partes, qui relative quidem in Cælis ſuis proximis quieſcunt, moventur vere. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in vere quieſcentibus) unaq; cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non ſunt eæ ipſæ quantitates quarum nomina præ ſe ferunt, ſed earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatij, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ menſuræ; & ſermo erit inſolens & pure Mathematicus ſi quantitates menſuratæ hic ſubintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris literis qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neq; minus contaminant Matheſin & Philoſophiam qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quod partes spatij illius immobilis in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur, id est facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile, quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum & inveniretur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus & apparentibus differentijs colligere, & contra, ex motibus seu veris seu apparentibus, eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

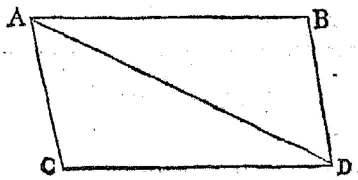
Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit Equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum, tantumq; impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunq: mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum ſed motuum, (ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi ſola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* ſive vis *N* imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea

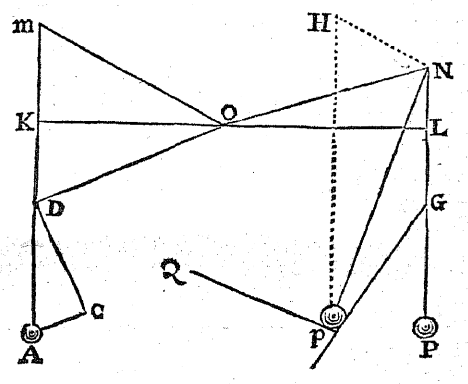
illa

illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriusq; lineæ concursu *D* reperiri necesse est.

Corol. II.

Et hinc patet compositio vis directæ AD ex viribus quibusvis obliquis AB & BD, & vicissim resolutio vis cujusvis directæ AD in obliquas quascunq; AB & BD. Quæ quidem Compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radij inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum O agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroq; O & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela sit *AC* & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa sint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est idem atq; pondus *P*, quod sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut OK ad *DO* (seu *OL*.) ~~ad *OK*~~. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt & sic consistent in æquilibrio: (quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis



Vectis & Axis in Peritrochio:) sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus *p* ponderi *P* æquale partim suspendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, posterior plano *pG* perpendicularis; & si vis ponderis *p* deorsum tendens, exponatur per lineam *pH*, resolvi potest hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare esset planum aliquod *pQ* secans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *pN*, *HN* perpendiculariter, nimirum planum *pQ* vi *pN* & planum *pG* vi *HN*. Ideoque si tollatur planum *pQ* ut pondus tendat filum, quoniam filum sustinendo pondus, jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eadem vi *pN*, qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut *pN* ad *pH*. Ideoq; si pondus *p* sit ad pondus *A* in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum *AM*, *pN* a centro rotæ, & ratione directa *pH* ad *pN*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atq; adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem *p* planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *pQ* sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam *pH* in plana, ut *pN* ad *pH*; atq; ad vim qua urget planum alterum *pG* ut *pN* ad *NH*. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur Corollarij hujus latissime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Authoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, radijs volubilibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascendentibus, cæterisq; potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires ~~Nervorum~~ tendinum ad animalium ossa movenda.

Corol. III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eiq; contraria reactio æquales sunt per Legem 3, adeoq; per legem 2, æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusq;, adeoq; differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum *A* sit triplo majus corpore sphærico *B*, habeatq; duas velocitatis partes, et *B* sequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, adeoq; motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B* ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinq; corpus *B* amittet partes totidem, adeoq; perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinq; existente semper summa partium sexdecim ut prius. Sin corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoq; progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus *B* amittendo, tot partes quot *A* lucratur, vel progredietur cum una parte, amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel regredietur cum una parte amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atq; ita summæ motuum conspirantium 15+1 vel 16+0, differentiæ contrario-

rum

17—1 & 18—2 ſemper erunt partium ſexdecim ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſq; velocitas ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem ut motus poſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non Sphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem, cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus; dein corporis utriuſq; motus (per Corol. 2.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atq; antea, & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

Corol. IIII.

Commune gravitatis centrum ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis, & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens

dens vel quiescet vel progredietur uniformiter in linea ~~a~~recta. Hoc postea in Lemmate xxiii demonstratur si punctorum motus fiat in eodem plano, & eadem ratione demonstrari potest si non fiat in eodem plano. ~~in loco solido~~. Ergo si corpora quotcunq; moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis, vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data: similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem, alijsq; omnibus in se extrinsecus impressis, omnino vacant, adeoq; moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusq; a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atq; adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur, a communi corporum omnium centro, in partes summis totalibus corporum, quo-

rum

rum ſunt centra, reciproce proportionales, adeoq; centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum; manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter ſe, nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ, & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel Quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum, niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. *Eſt* igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

Corol. V.

Corporum dato ſpatio incluſorum ijdem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſq; motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroq; caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem 2 æquales erunt congreſſuum effectus in utroq; caſu, & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

Corol. VI.

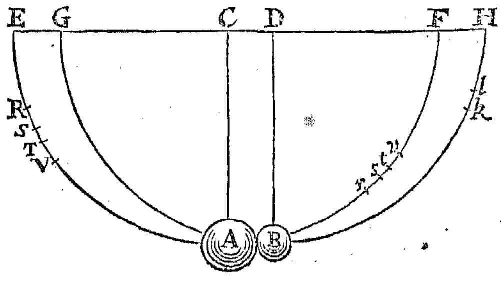
Si corpora moveantur quomodocunq; inter se & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt (per Legem 2.) adeoq; nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium

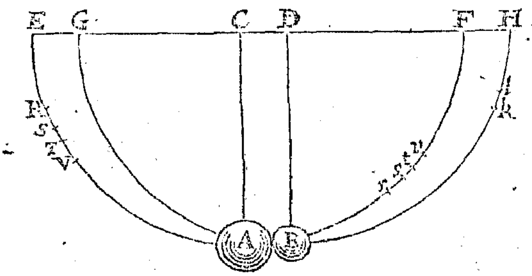
Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & Corollaria duo prima adinvenit *Galilæus* descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in Parabola, conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. Ab ijsdem Legibus & Corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium Pendulorum, suffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his ijsdem & Lege tertia *D. Christophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *D. Christianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile Principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim adinvenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes; Et primus quidem *D. Wallisius*, dein *D. Wrennus* & *D. Hugenius* inventum prodidit. Sed & veritas comprobata est a *D. Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum, quod etiam *Clarissimus Mariottus* Libro integro exponere mox dignatus est. Verum ut hoc experimentum cum Theorijs ad amussim congruat, habenda est ratio tum resistentiæ aeris, tum etiam vis Elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A*, *B* filis parallelis *A C*, *B D* a centris *C*, *D*. His centris & intervallis

vallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radijs *CA*, *DB* biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatq; poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta ſita in medio, & hæc exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proxime. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, abſq; errore ſenſibili, tanta erit ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo eſſe ut chorda arcus quem cadendo deſcripſit, Propoſitio eſt Geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*, a quo ſi corpus *A* demittatur & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio, & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime poſt reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus ad quem corpus *A*, ſublata aeris reſiſtentia, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *TA* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem, deinde in chordam arcus *tA* ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poſt reflexionem. Et ſic corpus B ducendum erit in chordam arcus B *l*, ut habeatur motus ejus proxime poſt reflexionem. Et ſimili methodo ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſq; tam ante, quam poſt reflexionem; & tum



de-

demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idq; in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo, duodecim vel ſexdecim concurrerent, reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuo directe occurrebant, quod in partes contrarias æqualis mutatio motus erat corpori utriq; illata, atq; adeo quod actio & reactio ſemper erant æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus, corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum ſex & redibat *A* cum duabus, redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim & reſtabit nihil; ſubducantur aliæ partes duæ & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fiunt partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim & *B* tardius cum partibus quinq; & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinq; partibus, pergebat B cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in B.



Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Namq; errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A* B, tum loca *s*, *k* notare ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Porro

Porro nequis objiciat Regulam ad quam probandam inventum est hoc experimentum præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si regula ~~conditio~~ illa in corporibus non perfecte duris tentanda est, debebit solummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elasticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenij* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus. Certius id affirmabitur de perfecte Elasticis. In imperfecte Elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi Elastica; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatq; corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ sit ad relativam velocitatem concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter constricta sic tentavi. Primum demittendo Pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore. In vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atq; hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A* quam pressione corporis *B*; proindeq; non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietq; systema corporum duo-

rum

rum & obſtaculi moveri in directum in partes verſus *B*, motuq; in ſpatiis liberis ſemper accelerato abire in infinitum. Quod eſt abſurdum & Legi primæ contrarium. Nam per *Legem primam* debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeq; corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent, neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinq; ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis Inſtrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oſcillante Libra, ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, *ſi recta aſcendunt & deſcendunt*, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe Libræ; *ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique*, æquipollent quæ ſunt ut aſcenſus & deſcenſus quatenus facti ſecundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas Manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam Cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus cuneus urget partes duas ligni fissi est ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema; *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi data superandi. Nam si Machinæ ita formentur ut velocitates Agentis & Resistentis sint reciproce ut vires, Agens resistentiam sustinebit, & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistentia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus Machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere quam late pateat, quamq; certa sit Lex tertia motus. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & Resistentis reactio ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE

MOTU CORPORUM

Liber PRIMUS

SECT I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.

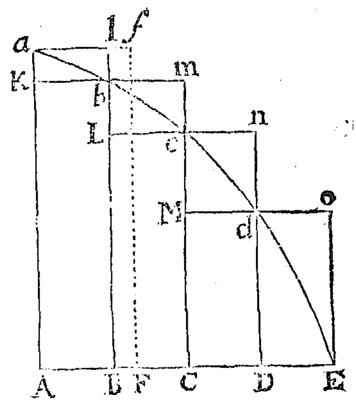
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore constanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales.

Si negas, sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

Lem-

Lemma II.

Si in figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AacE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq;* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl + Lm + Mn + Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum summa *Aa*, id est rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

Lemma III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ, at latitudine sua AF in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

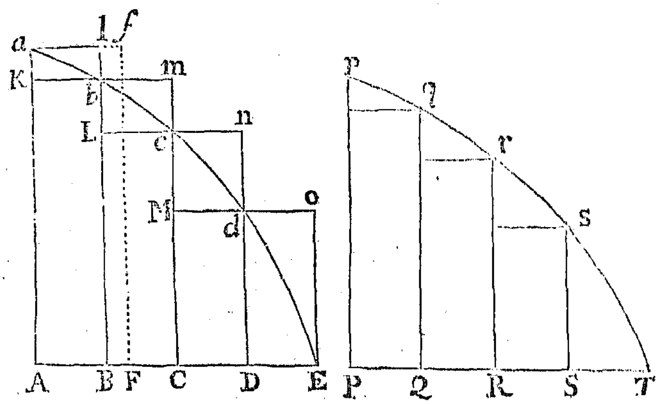
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumscribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

Lemma IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitq; idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura

ad

ad figuram; existente nimirum figura priore (per Lemma III.) ad summam priorem, & posteriore figura ad summam posteriorem in ratione æqualitatis.

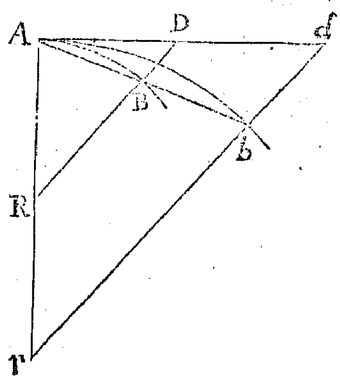
Corol. Hinc si duæ cujuscunq; generis quantitates in eundem partium numerum utcunq; dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam cæteræq; suo ordine ad cæteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atq; adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

Lemma V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicata ratione laterum.

Lemma VI.

*Si arcus quilibet positione datus A*B *subtendatur chorda AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinq; producta AD; dein puncta A, B ad invicem accedant & coeant; dico quod angulus BAD sub chorda & tangente contentus minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*



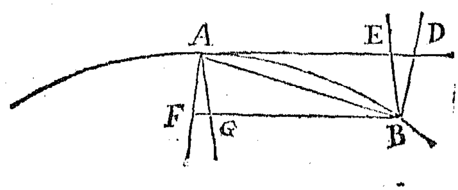
Nam producatur *AB* ad *b* & *AD* ad *d*, & punctis *A*, *B* coeuntibus, nullaq; adeo ipsius *Ab* parte *AB* jacente amplius intra curvam, manifestum est quod hæc recta A*b* vel coincidet cum tangente A*d*, vel ducetur inter tangentem & curvam. Sed caſus poſterior eſt contra naturam Curvaturæ, ergo prior obtinet. *Q. E. D.*

Lemma. VII.

Iiſdem poſitis, dico quod ultima ratio arcus, chordæ & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis. Vide Fig. *Lem. 6 & 8 vi.*

Nam producantur A*B* & A*D* ad *b* & *d* & ſecanti B D parallela agatur *b d*. Sitq; arcus A*b* ſimilis arcui AB. Et punctis A, *B* coeuntibus, angulus *d*A*b*, per Lemma ſuperius, evaneſcet; adeoq; rectæ A*b*, A*d* & arcus intermedius A*b* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius AB rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi per B ducatur tangenti parallela *BF* rectam quamvis A*F* per A tranſeuntem perpetuo ſecans in F, hæc BF ultimo ad arcum evaneſcentem AB rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo AFBD, rationem ſemper habet æqualitatis ad AD.



Corol. 2. Et ſi per B & A ducantur plures rectæ BE, *BD*, AF, A*G*, ſecantes tangentem AD & ipſius parallelam *BF*, ratio ultima abſciſſarum omnium AD, AE, *BF*, *BG*, chordæq; & arcus A*B* ad invicem erit ratio æqualitatis.

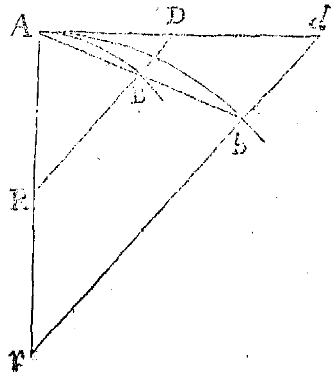
Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ in omni de rationibus ultimis argumentatione pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

Lemma VIII.

*Si rectæ datæ A*R, BR *cum arcu A*B, *chorda A*B *& tangente AD, triangula tria A*RB, *A*RB, *ARD conſtituunt, dein puncta A,* B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam

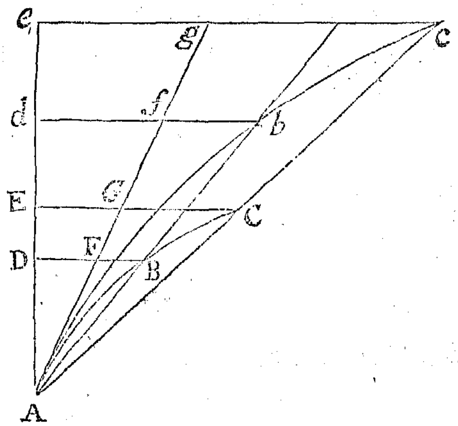
Nam producantur AB, A*D*, A*R* ad *b*, *d* & *r*. Ipsi *RD* agatur parallela *rbd*, & arcui AB similis ducatur arcus A*b*. Coeuntibus punctis A, B, angulus *b* A *d* evanescet, & propterea triangula tria *r A b*, *r A b*, *r A d* coincident, suntq; eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *R A B*, *R A B*, *R A D* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*



Corol. Et hinc triangula illa in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma IX.

Si recta A E & Curva A C positione datæ se mutuo secent in angulo dato A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur B D, E C, curvæ occurrentes in B, C; dein puncta B, C accedant ad punctum A: dico quod areæ triangulorum A D B, A E C erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.



Etenim in *AD* producta capiantur *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ & proportionales. Producatur *AC* ad *c*, ducatur curva A*bc* ipsi A*BC* similis, & recta A*g* tangatur curva utraq; in A; & secantur ordinatim applicatæ in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum coeant puncta *B*, *C* cum puncto A, & angulo *c* A*g* evanescente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*, adeoq; per Lemma V, erunt in duplicata

plicata ratione laterum Ad, Ae: Sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE. Ergo & areæ ABD, ACE sunt ultimo in duplicata ratione laterum AD, AE. *Q. E. D.*

Lemma X.

Spatia, quæ corpus urgente quacunq; vi regulari describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC, & spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis descriptæ, hoc est ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum AD, AE. *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus æqualibus in partibus istis ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur a locis figurarum, ad quæ corpora temporibus iisdem proportionalibus absq; viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

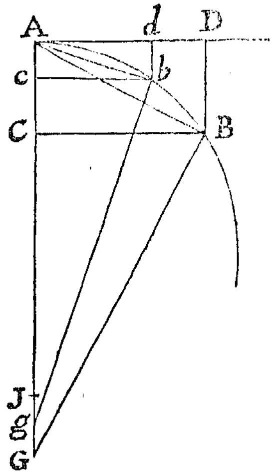
Lemma XI.

Subtensa evanescens anguli contactus est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcus AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, sitq; J intersectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt usq; ad A. Manifestum est quod distan-

tia

tia *G J* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *ABG*, *Abg* transeuntium) *AB quad.* æquale *AG*x*B* D & *Ab quad.* æquale A*g*x*bd*, adeoq; ratio AB *quad.* ad A*b quad.* componitur ex rationibus A*G* ad A*g* & B*D* ad *bd*. Sed quoniam *J G* assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio A*G* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* æqualis rationi ultimæ B*D* ad *bd*. *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, adeoq; eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus *D* non detur, tamen anguli *D*,*d* ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ *B*D, *bd* in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *A*B, A*b* & eorum sinus B*C*, *bc* fiant ultimo chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ B*D*, *bd*.

Corol. 2. Triangula rectilinea A*D*B, A*db* sunt ultimo in triplicata ratione laterum A*D*, A*d*, inq; sesquiplicata laterum *D*B, *db*: Utpote in composita ratione laterum A*D* & *D*B, A*d* & *db* existentia. Sic & triangula ABC, A*bc* sunt ultimo in triplicata ratione laterum B*C*, *bc*.

Corol. 3. Et quoniam *DB*, *db* sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum *AD*, *Ad*; erunt areæ ultimæ curvilineæ

ADB, *Adb* (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*, & ſegmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinite majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinite minorem; hoc eſt curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam eſſe nec infinite magnam, ſeu intervallum *AJ* finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt *DB* ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci poteſt, proindeq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat *DB* ſucceſſive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat *DB* ſucceſſive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinite major, & quilibet poſterior infinite major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinq; in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite major priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neq; novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deq; ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facile applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas & con-

contenta. Præmisi vero hæc Lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium Hypothesis; & propterea Methodus illa minus Geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasq; nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui breuitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium, & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi, vimq; talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum pergentis velocitatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attigit, nullam esse. Et responsio facilis est. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neq; antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neq; postea, sed tunc cum attingit, id est illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi.

Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumq; hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verum hæc Objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant, & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero tranſgredi, neq; prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data eſt differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. Igitur in ſequentibus, ſiquando facili rerum imaginationi conſulens, dixero quantitates quam minimas, vel evaneſcentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

SECT

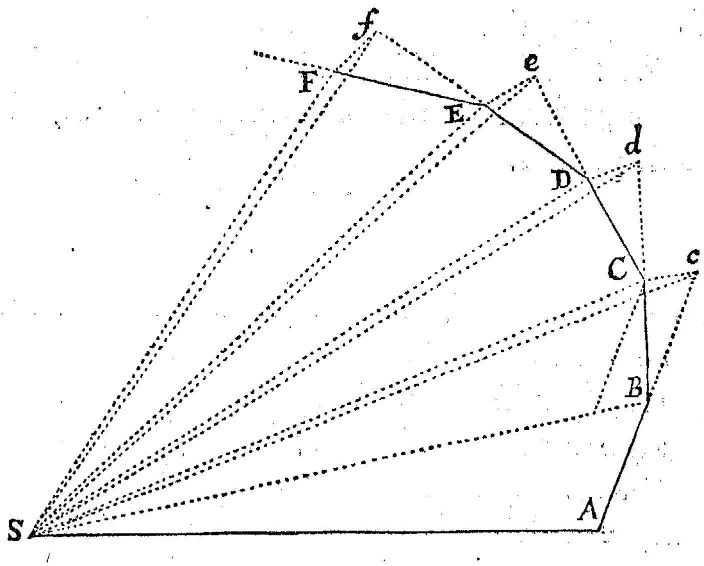
SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*, adeo ut radiis *AS*, B*S*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A* *S*B, B*Sc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta B*c* deflectere & pergere in recta B*C*. Ipsi B*S* parallela agatur *c* *C* occurrens B*C* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas S*B*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si



vis

vis centripeta successive agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD, DE EF, &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum SCD triangulo SBC & SDE ipsi SCD & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter ADF,(per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva; adeoq; vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. In mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum.

Corol. 2. In mediis omnibus, si arearum descriptio acceleratur, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed inde declinant in consequentia.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne quod, cum movetur in linea aliqua curva, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem. (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur & cogitur triangula quam minima SAB, SBC, SCD &c. circa punctum immobile S, temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi cC (per Prop. 40 Lib. I Elem. & Leg. II.) hoc est secundum lineam

B

B S, & in loco *C* secundum lineam ipsi *d D* parallelam, hoc est secundum lineam *C S*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est sive quiescat superficies in qua corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem una cum corpore, figura descripta & puncto suo S uniformiter in directum.

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S.* Porro si vis aliqua agat secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano sui motus, sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunq; moti ducto, describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legum Corol. 6.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum urgetur, urgeatur corpus utrumq; secundum lineas parallelas, perget corpus primum describere circa corpus alterum areas easdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum describere. Tendit igitur (per Theor. 2.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Co-

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum radio ad alterum ducto deſcribit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium ſecundum, compoſita,) qua corpus prius urgetur, ſubducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur; vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto deſcribit areas quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum; actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla eſt, vel miſcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Viſq; tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita, ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur, ~~circum quod æquabilis eſt~~ arearum deſcriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunq; movetur, ſi modo vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

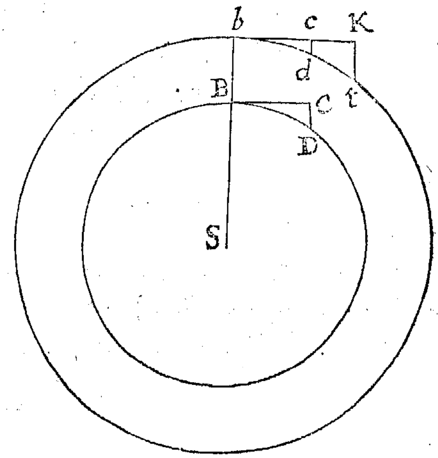
Quoniam æquabilis arearum deſcriptio Index eſt centri quod vis illa reſpicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita ſua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahitur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

Prop.

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & esse inter se ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Corpora B, b in circumferentiis circulorum BD, bd gyrantia, simul describant arcus BD, bd. Quoniam sola vi insita describerent tangentes BC, bc his arcubus æquales, manifestum est quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima spatiorum nascentium CD, cd: tendunt vero ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod areæ radiis descriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura tkb figuræ DCB similis, & per Lemma V, lineola CD erit ad lineolam kt ut arcus BD ad arcum bt: nec non, per Lemma XI, lineola nascens tk ad lineolam nascentem dc ut bt *quad.* ad bd *quad.* & ex æquo lineola nascens DC ad lineolam nascentem dc ut $BD \times bt$ ad bd *quad.* seu quod perinde est, ut $\frac{BD \times bt}{Sb}$ ad $\frac{bd\ quad.}{Sb}$, adeoq; (ob æquales rationes $\frac{bt}{Sb}$ & $\frac{BD}{SB}$) ut $\frac{BD\ quad.}{SB}$ ad $\frac{bd\ quad.}{Sb}$ Q. E. D.



Corol. 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad radios ita ſunt hæ vires inter ſe. Id eſt (ut cum Geometris loquar) hæ vires ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione ſimplici radiorum inverſe: necnon in ratione compoſita ex ratione ſimplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquantur, erunt tum vires centripetæ tum velocitates ut radii, & vice verſa.

Corol. 4. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut radii, vires centripetæ ſunt æquales, & velocitates in dimidiata ratione radiorum: Et vice verſa.

Corol. 5. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut quadrata radiorum, vires centripetæ ſunt reciproce ut radii, & velocitates æquales: Et vice verſa.

Corol. 6. Si quadrata temporum periodicorum ſunt ut cubi radiorum, vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata radiorum; velocitates autem reciproce in radiorum dimidiata ratione: Et vice verſa.

Corol. 7. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunq; ſimilium, centraq; ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex Demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata.

Scholium

Caſus Corollarii ſexti obtinet in corporibus cæleſtibus (ut ſeorſum colligerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius & Halleus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis demonſtrationis beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam cum vis illa, quo tempore corpus percurrit arcum *BØ*, impellat ipſum per ſpatium *CD*, quod ipſo motus initio æquale eſt quadrato arcus illius *BD* ad circuli diametrum applicato; & corpus omne vi eadem in eandem ſemper plagam con-

continuata, describat spatia in duplicata ratione temporum: Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum describit, efficiet ut corpus idem recta progrediens describat spatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale; adeoq; est ad vim gravitatis ut spatium illud ad spatium quod grave cadendo eodem tempore describit. Et hujusmodi Propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de Horologio oscillatorio, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

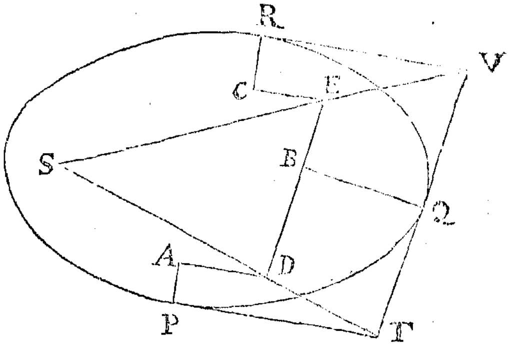
Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quotcunq; Et si corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas, adeoq; summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim, hoc est (si Polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id est ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoq; si Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis qua corpus urget circulum, & huic æqualis est vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

Prop. V. Prob. I.

Data quibuscunq; in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est ita ut sit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P, & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentia in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

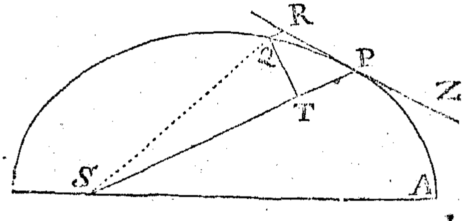
Nam cum corpus in *P* & *Q* radiis ad centrum ductis areas describat temporibus proportionales, sintq; areæ illæ simul descriptæ ut velocitates in *P* & *Q* ductæ respective in perpendicula a centro in tangentes *PT*, *QT* demissa: Erunt perpendicula illa ut velocitates reciproce, adeoq; ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*



Pro. VI. Theor. V.

Si corpus P revolvendo circa centrum S, describat lineam quamvis curvam APQ, tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR distantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam SP: Dico quod vis centripeta sit reciproce ut solidum $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$, *si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q.*

Namq; in figura indefinite parva *QRPT* lineola nascens *QR*, dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) & da-



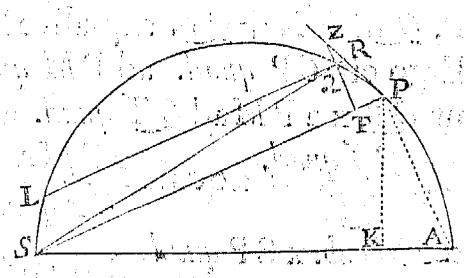
data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq; adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis conjunctim, adeoq; vis centripeta ut lineola QR directe & quadratum temporis inverse. Est autem tempus ut area SPQ, ejusve dupla $SP \times QT$, id est ut SP & QT conjunctim, adeoq; vis centripeta ut QR directe atq; SP *quad.* in QT *quad.* inverse, id est ut $\frac{SP\,quad. \times QT\,quad.}{QR}$ inverse. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur; inveniri potest lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyrari faciet. Nimirum computandum est solidum $\frac{SP\,quad. \times QT\,quad.}{QR}$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

Prop. VII. Prob. II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum.

Esto circuli circumferentia $SQPA$, centrum vis centripetæ S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q. Ad diametrum SA & rectam SP demitte perpendicula PK, QT, & per Q ipsi SP parallelam age LR occurrentem circulo in L & tangenti PR in R, & coeant TQ, PR in Z.



Ob similitudinem triangulorum ZQR, ZTP, SPA erit RP *quad.* (hoc est QRL) ad QT *quad.* ut SA *quad.* ad SP *quad.* Ergo $\frac{QRL \times SP\,quad.}{SA\,quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqua-

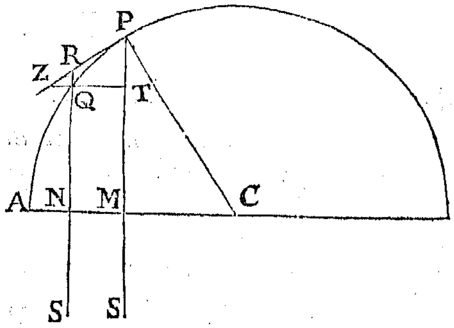
lia

lia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus, scribatur SP pro *RL*. Sic fiet $\frac{SP\,qc}{SAq}$ æquale $\frac{QTq \times SPq}{QR}$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut $\frac{SP\,qc}{SAq}$, id est (ob datum S*A* *quad*) reciproce ut quadrato-cubus distantiæ SP. Quod erat inveniendum.

Prop. VIII. Prob. III.

Moveatur corpus in circulo P Q A: ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S, ut lineæ omnes PS, *R*S *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A circuli centro *C* agatur semidiameter *CA* parallelas istas perpendiculariter secans in *M* & *N*, & jungantur *C*P. Ob similia triangula *C*P*M*, & *T*P*Z*, vel (per Lem. VIII.) *T*P*Q*, est *C*P*q*. ad P*Mq*. ut P*Qq*. vel (per Lem. VII.) P*Rq*. ad *QTq*. & ex natura circuli rectangulum *QR* x *RN* + *Q*N æquale est P*R* quadrato. Coeuntibus autem punctis P, *Q* fit *RN* + *Q*N æqualis 2P*M*. Ergo est *C*P *quad.* ad P*M* *quad.* ut *QR* x 2 P*M* ad *QT* *quad.* adeoq; $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$. Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ hoc est (neglecta ratione determinata $\frac{2\,SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciproce ut P*M* *cub.* *Q. E. J.*



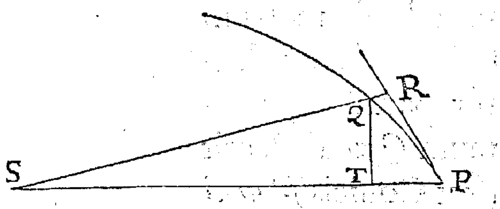
Scho-

Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Prop. IX. Prob. IV.

Gyretur corpus in spirali P Q S *secante radios omnes* S P, S Q, *&c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*



Detur angulus indefinite parvus P S Q, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura S P Q R T. Ergo datur ratio $\frac{QT}{RQ}$, estq; $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc est ut S P. Mutetur jam utcunq; angulus P S Q, & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius P R vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut S P. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut S P *cub.* id est (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut cubus distantiæ S P. *Q. E. J.*

Lemma XII.

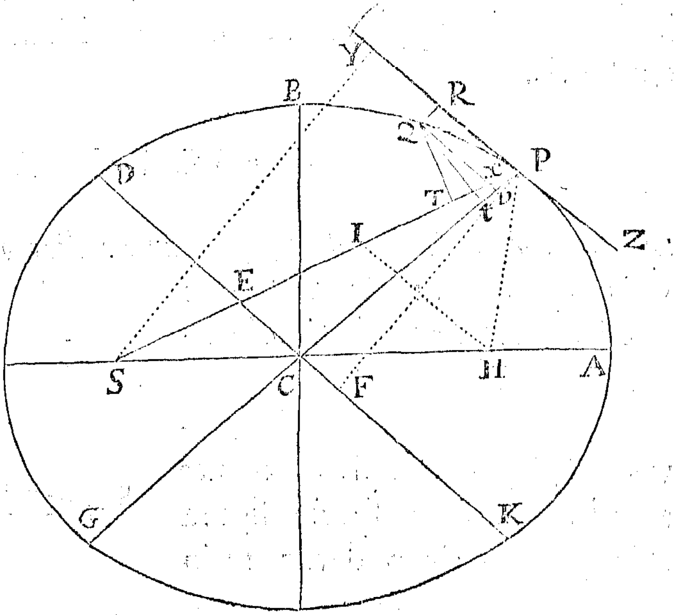
Parallelogramma omnia circa datam Ellipsin descripta esse inter se æqualia. Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circum diametros ejus descriptis.

Constat utrumq; ex Conicis.

Prop

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.



Sunto CA, CB semiaxes Ellipseos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum $QvRP$, erit (ex Conicis) PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* est ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma xii.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & medijs in se mutuo, fiet $\frac{Qtq \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$ Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$, id est

(ob

(ob datum $2\,BCq. \times CAq.$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$, hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q.E.I.*

Corol. 1. Unde viciſſim ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem Ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Figuris univerſis circa centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt per Corol. 3 & 7 Prop. IV: In Ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut Ellipſeon areæ totæ directe & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe, hoc eſt ut axes illi directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverſe, & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema *Galilei*. Et ſi Coniſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa.

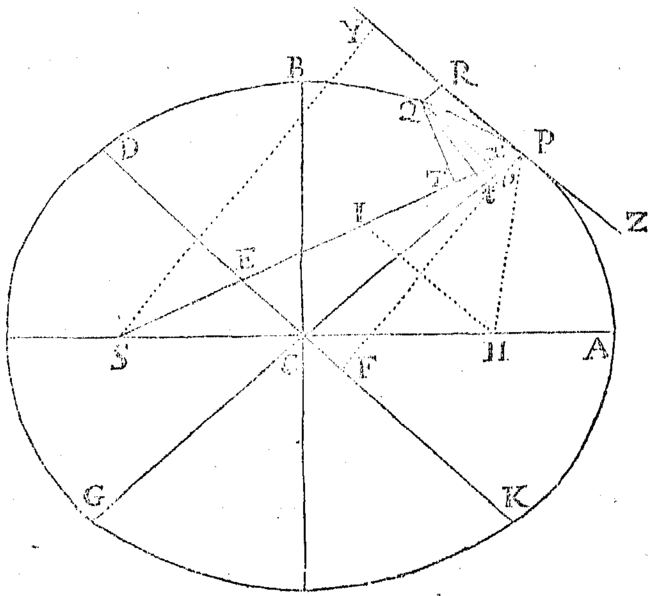
SECT. III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

Eſto Ellipſeos ſuperioris umbilicus S. Agatur SP ſecans Ellipſeos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $Qx PR$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico H linea HI ipſi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI, adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſorum PS, PH, quæ conjunctim axem totum 2 AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2\,BC\ quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv; id eſt ut PE (ſeu AC) ad PC: & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv;



&

& $G v$ P ad $Q v$ *quad.* ut C P *quad.* ad $C D$ *quad*; & (per Lem. VIII.) $Q v$ *quad.* ad $Q x$ *quad.* punctis Q & P coeuntibus, est ratio æqualitatis, & $Q x$ *quad.* seu $Q v$ *quad.* est ad $Q T$ *quad.* ut E P *quad.* ad P F *quad*, id est ut $C A$ *quad.* ad P F *quad.* sive (per Lem. XII.) ut $C D$ *quad.* ad $C B$ *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times Q R$ sit ad $Q T$ *quad.* ut AC ad $PC + L$ ad $Gv + CPq$ ad $CDq + CDq$. ad CBq. id est ut $AC \times L$ (seu $2 CBq.$) $\times CPq$. ad $PC \times Gv \times CBq$. sive ut $2 PC$ ad Gv. Sed punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2 PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$ & fiet $L \times SPq.$ æquale $\frac{SPq. \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$. id est reciproce in ratione duplicata distantiæ S P. *Q. E. P.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

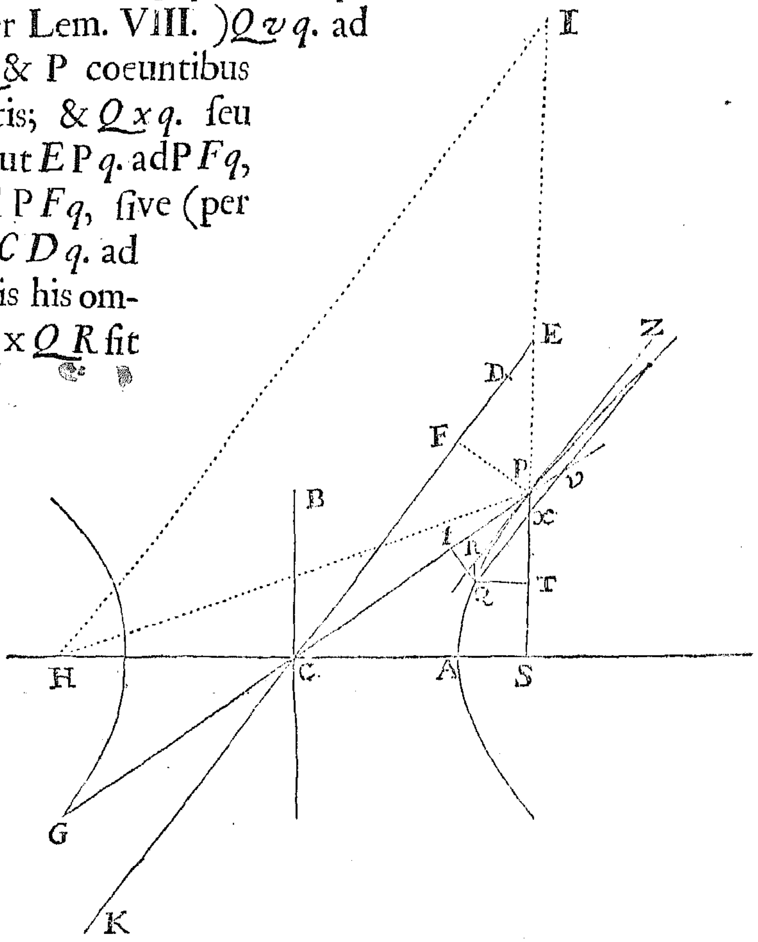
Prop. XII. Prob. VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto $C A$, $C B$ semi-axes Hyperbolæ; PG, $K D$ diametri conjugatæ; P F, $Q t$ perpendicula ad diametros; & $Q v$ ordinatim applicata ad diametrum G P. Agatur S P secans tum diametrum $D K$ in E, tum ordinatim applicatam $Q v$ in x, & compleatur parallelogrammum $Q R$ P x. Patet E P æqualem esse semiaxi transverso $A C$, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea $H I$ ipsi $E C$ parallela, ob æquales C S, $C H$, æquentur E S, $E I$; adeo ut E P semidifferentia sit ipsarum P S, P I, id est (ob parallelas $H I$, P R & angulos æquales I P R, H P Z) ipsarum P S, P H, quarum differentia axem totum $2 A C$ adæquat. Ad S P

 de-

demittatur perpendicularis *QT*. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto *L*, erit *L* x *QR* ad *L* x P*v* ut *QR* ad P*v*, id est, ut P*E* (seu *AC*) ad *PC*; Et *L* x P*v* ad *Gv* P ut *L* ad *Gv*; & *Gv* P ad *Qvq*. ut *C* P*q*. ad *CDq*; & (per Lem. VIII.)*Qvq*. ad *Qxq*, punctis *Q* & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & *Qxq*. seu *Qvq*.est ad *QTq*.ut *E*P*q*. adP*Fq*, id est ut *CAq*. ad P*Fq*, sive (per Lem. XII.) ut *CDq*. ad *CBq*: & conjunctis his omnibus rationibus *L* x *QR* fit ad *QTq*.ut *AC* ad P*C*+*L* ad *Gv*+*CPq*.ad *CDq*.+*CDq*. ad *CBq*: id est ut *AC*x*L* (seu 2*BCq*.) x *P*-*Cq*. ad *PC*x *Gv*x*C*B *quad*. sive ut 2 *PC* ad *Gv*, sed punctis *Q* & P coeuntibus æquantur 2 *PC* & *Gv*. Ergo & his proportionalia *L* x *QR* & *QTq*. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$ & fiet *L* x S*Pq*. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut LxSP*q*, id est in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*



Eo-

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

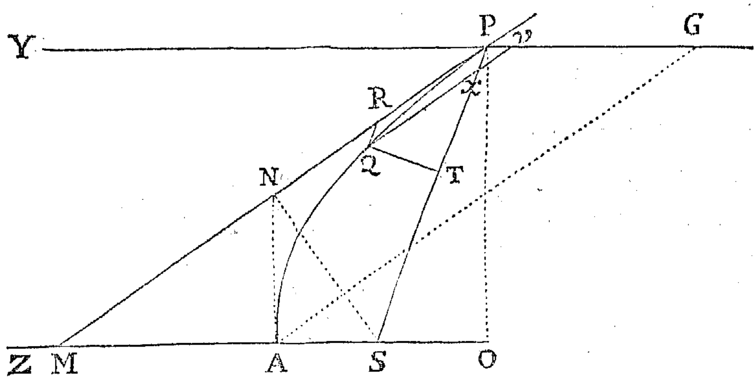
Lemma XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

Lemma XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *A* P *Q* Parabola, S umbilicus ejus, *A* vertex principalis, P punctum contactus, P *O* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *P M* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *S N* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem.



Jungatur *A N*, & ob æquales *M S* & *S P*, *M N* & *N P*, *M A* & *A O*, parallelæ erunt rectæ *A N* & *O P*, & inde triangulum *S A N* rectangulum erit ad *A* & simile triangulis æqualibus *S M N*, S *P N*, Ergo *P* S est ad *S N* ut *S N* ad S *A*. *Q.* E *D.*

Corol. 1. *P* S *q*.est ad *S N q*.ut *P S* ad S *A*.

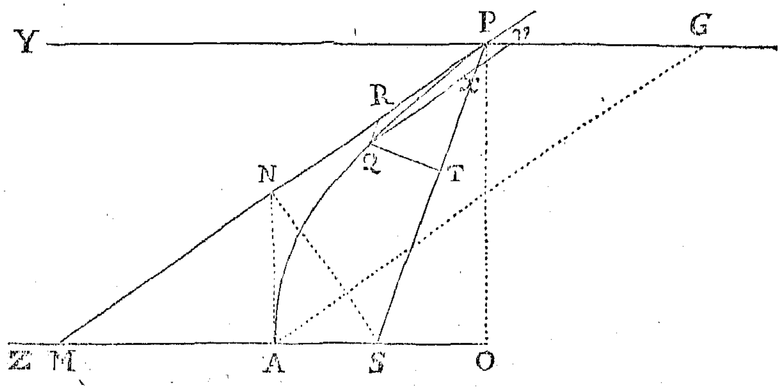
Corol. 2. Et ob datam S *A*, est S *N q*. ut P S.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis P *M* cum recta S *N* quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam *A N*, quæ Parabolam tangit in vertice principali. Prop

Prop. XIII. Prob. III.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio Lemmatis, sitq; P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco *Q* in quem corpus proxime movetur, age ipsi S P Parallelam *QR* & perpendicularem *QT*, necnon *Qv* tangenti parallelam & occurentem tum diametro *YPG* in *v*, tum distantiæ SP in *x*. Jam ob similia triangula P*xv*, *M*SP & æqualia unius latera *SM*, SP, æqualia sunt alterius latera P*x* seu *QR* & P*v*. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ *Qv* æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri P*v*, id est (per Lem. XIII.) rectangulo 4 P*S* x P*v* seu 4 PS x *QR*; & punctis P & *Q* coeuntibus, ratio *Qv* ad *Qx* (per *L*em. 8.) fit æqualitatis. Ergo *Qxq*. eo in casu, æquale est rectangulo 4 P*S* x Q*R*. Est autem (ob æquales angulos *QxT*, *M*P*S*, P*MO*) *Qxq*. ad Q*Tq*. ut P*Sq*. ad *SNq*. hoc est (per Corol. I. *L*em. X IV.) ut P*S* ad *AS*, id est ut 4 P*S* x *QR* ad 4 *A*S x *QR*, & inde (per Prop. 9. Lib. V Elem.) *QTq*. & 4 *A*S x Q*R* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$, & fiet $\frac{SPq.\times QTq.}{QR}$ æquale SP*q*. x 4 *AS* : & propterea (per Corol. Theor. V.) vis centripeta est reciproce ut *S*P*q*. x 4 *AS*, id est, ob datam 4 *A*S, reciproce in duplicata ratione distantiæ SP. Q. *E*. *I*.



Corol.

Corol. I. Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P, ſecundum lineam quamvis rectam P *R*, quacunq; cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.

Corol. II. Et ſi velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, qua lineola P *R* in minima aliqua temporis particula deſcribi poſſit, & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium *QR*: movebitur hoc corpus in Conica aliqua ſectione cujus latus rectum eſt quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo ſit ubi lineolæ P *R*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipſin, & caſum excipio ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

Prop. XIV. Theor. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta decreſcat in duplicata ratione diſtantiarum a centro; dico quod Orbium Latera recta ſunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

Nam per Corol. II. Prob. VIII. Latus rectum *L* æquale eſt quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo ſit ubi coeunt puncta P & *Q*. Sed linea minima *QR*, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per Hypotheſin) reciproce ut S *P q*. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ eſt ut *QTq*. x S *P q*. hoc eſt, latus rectum L in duplicata ratione areæ *QT* x S P. *Q. E. D.*

Corol. Hinc Ellipſeos area tota, eiq; proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione temporis periodici. Namq; area tota est ut area QT x SP ducta in tempus periodicum.

Prop.

Prop. XV. Theor. VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata transversorum axium.

Namq; axis minor est medius proportionalis inter axem majorem (quem transversum appello) & latus rectum, atq; adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis transversi. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Theorematis Sexti, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione periodici temporis. Dematur utrobiq; dimidiata ratio lateris recti & manebit sesquiplicata ratio axis transversi æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

Prop. XVI. Theor. VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisq; ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. VideFig. Prop. X. &. XI.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY & velocitas corporis P erit reciproce in dimidiata ratione quantitatis $\frac{SYq.}{L}$ Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens PR, id est (ob proportionales PR ad QT & SP ad SY) ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut SY reciproce & $SP \times QT$ directe; estq;

SPx

S P x QT ut area dato tempore descripta, id est, per Theor. VI. in dimidiata ratione lateris recti *Q. E. D.*

Corol. 1. Latera recta sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoq; velocitas in Conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia, in dimidiata ratione lateris recti ad distantiam illam duplicatam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias, hoc est (per Corol. VI. Theor. IV.) reciproce in dimidiata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum dimidiata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio dimidiata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem ~~vel æqualibus~~ figuris, vel etiam in figuris diversis ~~inæqualibus~~, quarum latera recta sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in dimidiata ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2 Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in dimidiata ratione distantiæ.

Corol. 7. In Parabola, velocitas ubiq; est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in dimidiata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Theorematis quarti, servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubiq; æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

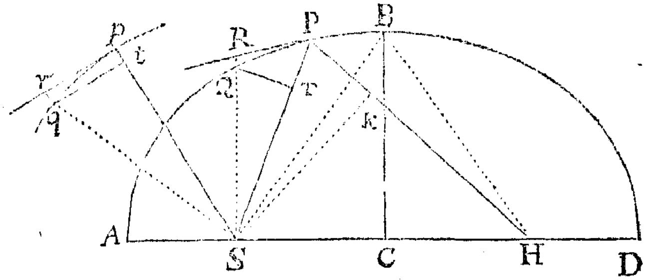
Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti Sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Theor. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio, reciproce in dimidiata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

Prop. XVII. Prob. IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea quam corpus describit, de loco dato cum data velocitate secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit quæ corpus *p* in orbita quavis data *pq* gyrare faciat, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*. De loco P secundum lineam P*R* exeat corpus P cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Conisectionem *PQ*. Hanc igitur recta *P*R tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *pr* orbitam *pq* in *p*, & si ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Theor. VIII.) latus rectum Conisectionis ad latus rectum-um orbitæ datæ, in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atq; adeo datur. Sit istud L. Datur præterea Conisectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH, & dabitur positione linea



PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculo SK, & erecto semiaxe conjugato BC, est $SPq. - 2KPH + PHq.$ (per Prop. 13. Lib. II. Elem.) $= SHq. = 4CHq. = 4BHq. - 4BCq. = \overline{SP+PH}\,quad. - L \times \overline{SP+PH} = SPq. + 2SPH + PHq. - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobiq; $2KPH + L \times \overline{SP+PH} - SPq. - PHq.$ & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP+PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS, adeoq; figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis, adeoq; tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum S P & PH, & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. 1 Hinc in omni Conisectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter la-

 tus

tus rectum & 4 *DS*. Nam proportio SP + P*H* ad P*H* ut 2 SP+2KP ad *L*, in casu hujus Corollarii, fit *DS* + *DH* ad *DH* ut 4 *D*S ad *L*, & divisim *D*S ad *DH* ut 4 *DS* − *L* ad *L*.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali *D*, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam *D*S, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam *D*S gyrantis: (Per Corol. 3. Theor. VIII.) dein *DH* ad *D*S ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4 *D*S.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunq; Conica, & ex orbe suo impulsu quocunq; exturbetur; cognosci potest orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motús quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia, mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

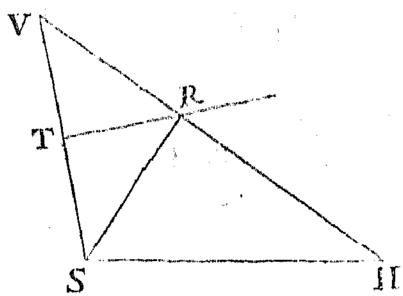
SECT.

SECT. IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

Lemma XV.

Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S,H,ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ SV,HV, quarum una HV æqualis sit axi transverso figuræ, altera SV a perpendiculo TR in se demisso bisecetur in T; perpendiculum illud TR sectionem Conicam alicubi tangit: & contra, si tangit, erit VH æqualis axi figuræ.



Secet enim *V*H sectionem conicam in *R*, & jungatur S*R*. Ob æquales rectas *T*S, *TV*, æquales erunt anguli *TR*S, *TRV*. Bisecat ergo *RT* angulum *V*RS & propterea figuram tangit: & contra. *Q.E.D.*

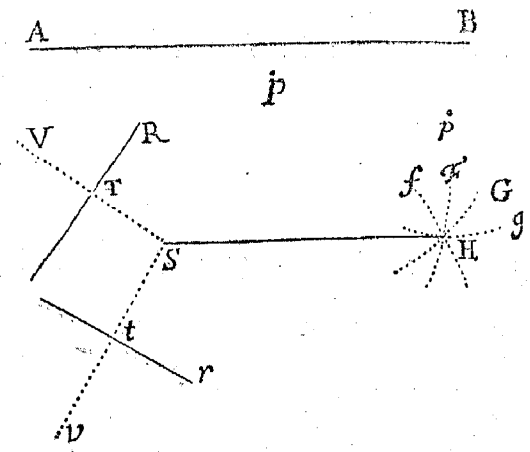
Prop. XVIII. Prob. X.

Datis umbilico & axibus transversis describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; *AB* longitudo axis transversi Trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod Trajectoria debet transire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro P intervallo *AB* − SP, si orbita sit Ellipsis, vel *AB* + SP, si ea sit Hyperbola, describatur circulus H*G*. Ad tangentem *TR* demittatur perpen-

pen-

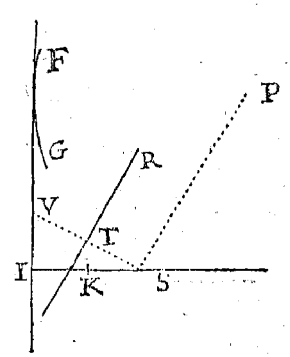
pendiculum *ST*, & producatur ea ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*; centroq; *V* & intervallo *AB* deſcribatur circulus *FH*. Hac methodo ſive dentur duo puncta P, *p*, ſive duæ tangentes *TR*, *tr*, ſive punctum P & tangens *TR*, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria deſcripta (eo quod PH + SP in Ellipſi, & PH − SP in Hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per Lemma ſuperius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*. *Q. E. F.*



Prop. XIX. Prob. XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & *TR* tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS deſcribe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* ſi dantur duo puncta P,



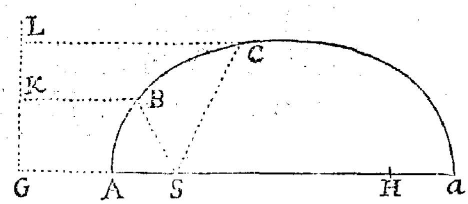
p, vel

p; vel tranſeat per duo puncta V, v, ſi dantur duæ tangentes TR, tr, vel tangat circulum FG & tranſeat per punctum V, ſi datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamq; biſeca in K; & axe SK, vertice principali K deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola ob æquales SK & IK, SP & FP tranſibit per punctum P; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR, tanget rectam TR. *Q. E. F.*

Prop. XX. Prob. XII.

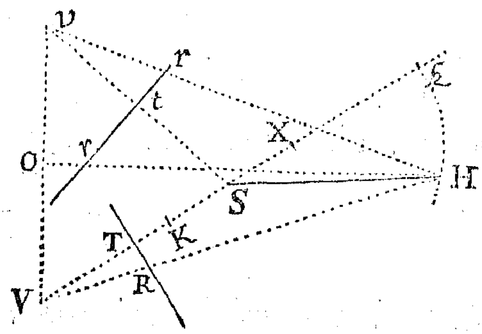
Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Cas. 1. Dato umbilico S, deſcribenda ſit Trajectoria ABC per puncta duo B, C. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis tranſverſi ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS, & LC ad CS. Centris B, C, intervallis BK, CL, deſcribe circulos duos, & ad rectam KL, quæ tangat eoſdem in K & L, demitte perpendiculum SG, idemq; ſeca in A & a, ita ut ſit SA ad AG & Sa ad aG, ut eſt SB ad BK, & axe Aa, verticibus A, a, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cum ſit SA ad AG ut Sa ad aG, erit diviſim $Sa - SA$ ſeu SH ad $aG - AG$ ſeu Aa in eadem ratione, adeoq; in ratione quam habet axis tranſverſus figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumq; ſint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta B, C, ut ex Conicis manifeſtum eſt.



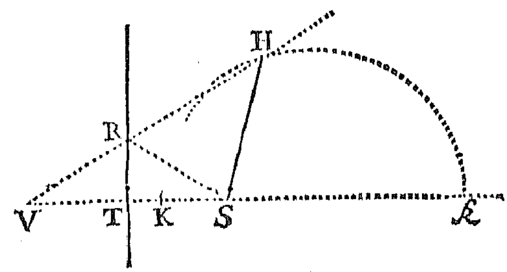
Cas.

Cas. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula S*T*, S*t* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv* æquales *T*S, *ts*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *O*H, rectamq; *V*S infinite productam ſeca in *K* & *k* ita, ut ſit *VK* ad *K*S & *Vk* ad *k*S ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis tranſverſus ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *Kk* deſcribatur circulus ſecans rectam *O*H in H; & umbilicis S, H, axe tranſverſo ipſam V H æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *Kk* in *X*, & junge H*X*, HS, HV, H*v*. Quoniam eſt V*K* ad *K*S ut V*k* ad *kS*; & compoſite ut V*K*+V*k* ad *K*S + *k*S; diviſimq; ut V*k*−V*K* ad *kS*−*KS* id eſt ut 2 V*X* ad 2 *KX* & 2 K*X* ad 2 S*X*, adeoq; ut V*X* ad H*X* & H*X* ad *SX*, ſimilia erunt triangula V*X*H, H*X*S, & propterea VH erit ad *S*H ut V*X* ad *X*H, adeoq; ut VK ad KS. Habet igitur Trajectoriæ deſcriptæ axis tranſverſus VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet Trajectoriæ deſcribendæ axis tranſverſus ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, *v*H æquentur axi tranſverſo, & V*S*, *v*S a rectis *TR*, *tr* perpendiculariter biſecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.*

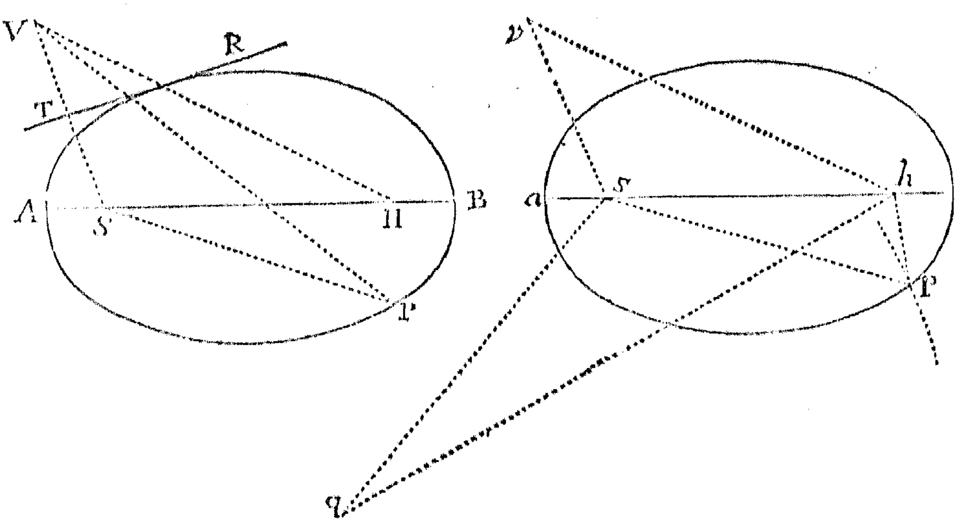


Cas. 3. Dato umbilico *S* deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem S*T*, & produc eandem ad V, ut ſit *T*V æqualis *ST*. Junge V*R*, & rectam VS infinite productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit *V*K ad SK & *Vk* ad S*k* ut Ellipſeos deſcribendæ axis tranſverſus ad diſtantiam umbilicorum; circuloq; ſuper diametro K*k* de-

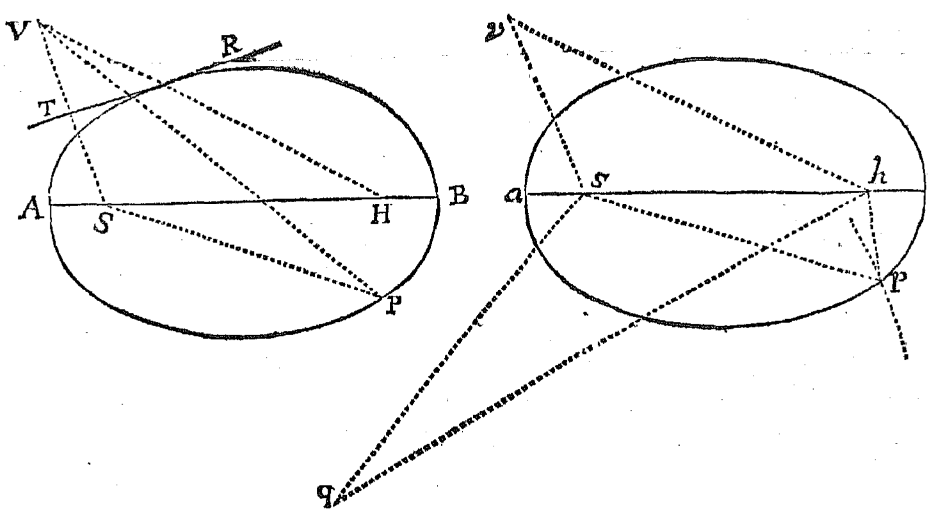
deſcripto, ſecetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe tranſverſo rectam *HV* æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Namq; *VH* eſſe ad *SH* ut *VK* ad *SK*, atq; adeo ut axis tranſverſus Trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in Caſu ſecundo, & propterea Trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribenda: rectam vero *TR* qua angulus *VRS* biſecatur, tangere Trajectoriam in puncto *R*, patet ex Conicis *Q.E.F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit Trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, tranſeatq; per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæq; ſimilis ſit figuræ *a p b*, axe



tranſverſo *ab* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Angulis autem *VSP*, *SVP* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroq; *q* & intervallo quod ſit ad *ab* ut *SP* ad V*S* deſcribe circulum secantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH* quæ sit ad *sb* ut est *SP* ad *sp*, quæq; angulum *PSH* angulo *psb* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales constituat. Deniq; umbilicis S, *H*, axe distantiam V*H* æquante, describatur sectio conica.



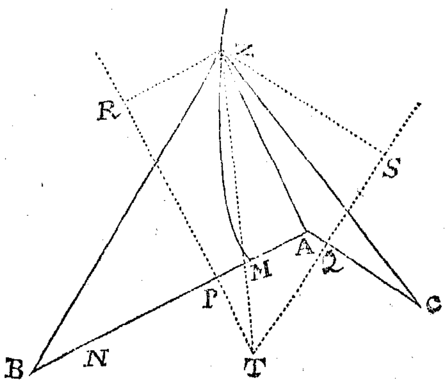
Dico factum. Nam si agatur *sv* quæ sit ad *sp* ut est *sb* ad *sq*, quæq; constituat angulum *vsp* angulo *bsq* & angulum *vsb* angulo *psq* æquales, triangula *svb*, *spq* erunt similia, & propterea *vb* erit ad *pq* ut est *sb* ad *sq*, id est (ob similia triangula VS*P*, *bsq*) ut est *V*S ad S*P* seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vb* & *ab*. Porro ob similia triangula *V*S*H*, *vsb*, est *VH* ad S*H* ut *vb* ad *sb*, id est, axis Conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sb*; & propterea figura jam descripta similis est figuræ *apb*. Transit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *P*S*H* simile sit triangulo *psb*; & quia *V H* æquatur ipsius axi & *V*S bisecatur perpendiculariter a recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

Lem.

Lemma XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet: Ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & axis transversus differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecto *PR* perpendicular ad *AB*, demissoq; *ZR* perpendiculari ad *PR*, erit ex natura hujus Hyperbolæ *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt *A*, *C* & axis transversus differentia inter *AZ* & *CZ*, duciq; potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; adeoq; rectis *RP*, *SQ* concurrentibus in *T*, locabitur punctum *Z* in recta *TZ* positione data. Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt *B* & *C* & axis transversus differentia rectarum BZ, *CZ*, inveniri potest alia recta in qua punctum *Z* locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habetur punctum quæsitum *Z* in earum intersectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ* æquantur, punctum *Z* locabitur in perpendiculo bisecante distantiam *AB*, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas.

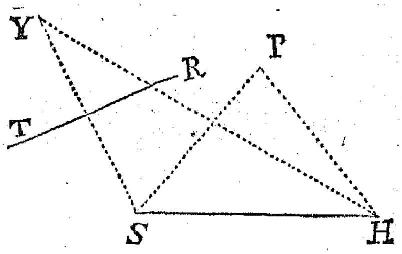
Cas. 3. *Si* omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* transeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per *Librum* Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

Prop. XXI. Prob. XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

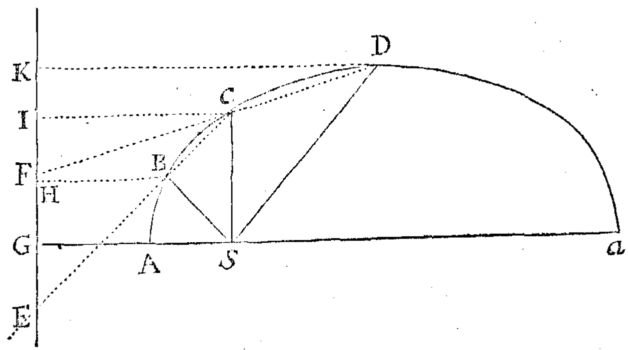
Detur umbilicus S, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus sit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum S*T*, & produc idem ad *Y*, ut sit *TY* æqualis S*T*, & erit *YH* æqualis axi transverso. Junge *SP*, *H*P,& erit SP differentia inter *H*P & axem transversum. *Hoc* modo si dentur plures tangentes *T*R, vel plura puncta P, devenietur semper ad lineas totidem *YH*, vel P*H*, a dictis punctis *Y* vel P ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *S*P differunt ab iisdem, atq; adeo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma superius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est *YH*, vel si Trajectoria Ellipsis est, P*H*+SP; sin *Hy*perbola, P*H*−SP) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*,*F*, ut sit *EB* ad *EC* ut *SB* ad S*C*,& *FC* ad *FD* ut *SC* ad S*D*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales S*G*, B*H*, inq; *G*S infinite producta cape *GA* ad *A*S & *Ga* ad *a*S ut est *HB* ad *BS*; & erit *A* ver-

vertex, & Aa axis transſverſus Trajectoriæ: quæ, perinde ut GA minor, æqualis vel major fuerit quam AS, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ GK cum puncto A; in ſecundo caſu abeun- in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GK. Nam ſi demittantur



ad GF perpendicula CI, DK, erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc eſt ut SC ad SB; & viciſſim IC ad SC ut HB ad SB, ſeu GA ad SA. Et ſimili argumento probabitur eſſe KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in Coniſectione circa umbilicum S ita deſcripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad ſingula Sectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam GK demiſſa in data illa ratione.

Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit Clariſſimus Geometra *De la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. VIII. Prop XXV.

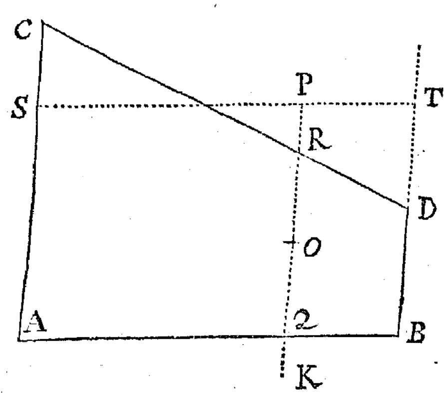
SECT

SECT. V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

Lemma XVII.

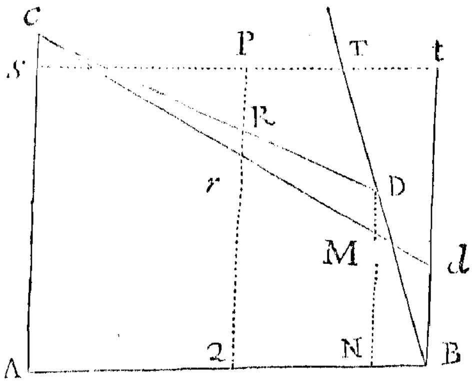
*Si a datæ conicæ ſectionis puncto quovis P, ad Trapezii alicujus A*B*C D, in Conica illa ſectione inſcripti, latera quatuor infinite producta A B, CD, AC, DB, totidem rectæ P Q, PR, PS, PT in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera P Q* x *P R, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita P* S x P *T in data ratione.*



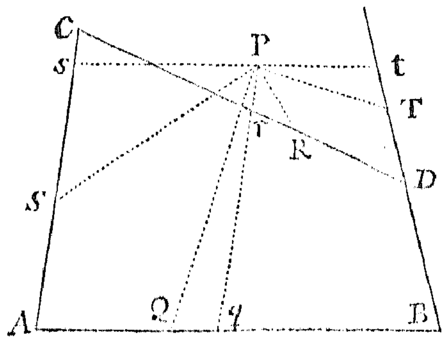
Cas. 1. Ponamus imprimis lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta P*Q* & P*R* lateri *AC*, & PS ac P*T* lateri *A B*. Sintq; inſuper latera duo ex oppoſitis, puta *A C* & *B D*, parallela. Et recta quæ biſecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *R Q*. Sit *O* punctum in quo *R Q* biſecatur, & erit P*O* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc P*O* ad *K* ut ſit *O K* æqualis PO, & erit *O K* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, B, P & K ſint ad Conicam ſectionem, & P*R* ſecet *A B* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III *Apollonii*) rectangulum P*Q*K ad rectangulum *A Q B* in data ratione. Sed *Q*K & P*R* æquales ſunt, utpote æqualium *O*K, *O* P, & *O Q*, *O R* differentiæ, & inde etiam rect-

rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia ſunt; atq; adeo rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum AQB, hoc eſt ad rectangulum $PS \times PT$ in data ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera oppoſita AC & BD non eſſe parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t, tum Conicæ ſectioni in d. Junge Cd ſecantem PQ in r, & ipſi PQ parallelam age DM ſecantem Cd in M & AB in N. Jam ob ſimilia triangula BTt, DBN, eſt Bt ſeu PQ ad Tt ut DN ad NB. Sic & Rr eſt ad AQ ſeu PS ut DM ad AN. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum PQ in Rr eſt ad rectangulum Tt in PS, ita rectangulum NDM eſt ad rectangulum ANB, & (per Cas. 1) ita rectangulum QPr eſt ad rectangulum SPt, ac diviſim ita rectangulum QPR eſt ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*



Cas. 3. Ponamus deniq; lineas quatuor PQ, PR, PS, PT non eſſe parallelas lateribus AC, AB, ſed ad ea utcunq; inclinatas. Earum vice age Pq, Pr parallelas ipſi AC; & Ps, Pt parallelas ipſi AB; & propter datos angulos triangulorum PQq, PRr, PSs, PTt, dabuntur rationes PQ ad Pq, PR ad Pr, PS ad Ps & PT ad Pt, atq; adeo rationes compoſitæ PQ in PR ad Pq in Pr, & PS in PT ad Ps in Pt. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio Pq in Pr ad Ps in Pt data eſt: Ergo & ratio PQ in PR ad PS in PT. *Q. E. D.*

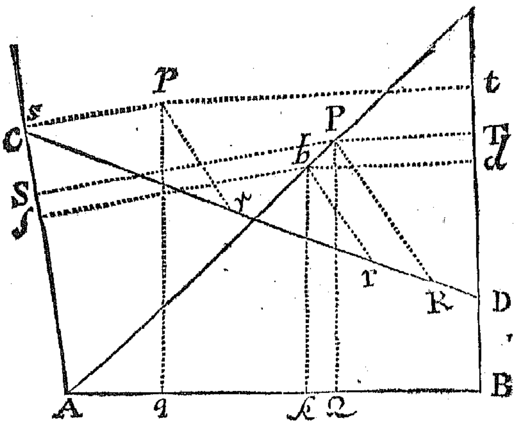


Lem-

Lemma XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera Trapezii P Q x P R *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* P S x P T *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam ſectionem circa Trapezium deſcriptam.*

Per puncta *A*, B, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum P, puta *p*, concipe Conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge *A* P ſecantem hanc Conicam ſectionem alibi quam in P ſi fieri poteſt, puta in *b*. Ergo ſi ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *b*r, *bſ*, *bd*; erit ut *bk* x *b*r ad *bd* x *bſ* ita (per Lemma XVII) *pq* x *pr* ad *ps* x *pt* & ita (per hypoth.) P Q x P R ad P S x P T. Eſt & propter ſimilitudinem Trapeziorum *bkAſ*, P Q *A* S, ut *bk* ad *bſ* ita P Q ad P S. Quare applicando terminos prioris propoſitionis ad terminos correſpondentes hujus, erit *b*r ad *bd* ut P R ad P T. Ergo Trapezia æquiangula *D*r*bd*, *D* R P T ſimilia ſunt, & eorum diagonales *Db*, *D P* propterea coincidunt. Incidit itaq; *b* in interſectionem rectarum A P, *D* P adeoq; coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunq; ſumatur, incidit in aſſignatam Conicam ſectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc ſi rectæ tres P Q, P R, P S a puncto communi P ad alias totidem poſitione datas rectas A B, *C D*, A *C*, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitq; rectangulum ſub duabus ductis P Q x P R ad quadratum tertii, P S *quad.* in data ratione: punctum

Scho- P,

P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in ſectione Conica quæ tangit lineas *AB*, *CD* in *A* & *C* & contra. Nam coeat linea *BD* cum linea *AC* manente poſitione trium *A*B, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea P*T* cum linea PS: & rectangulum *P*S x P*T* evadet PS *quad.* rectæq; *AB*, *CD* quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* ſecabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius ſecare poſſunt ſed tantum tangent.

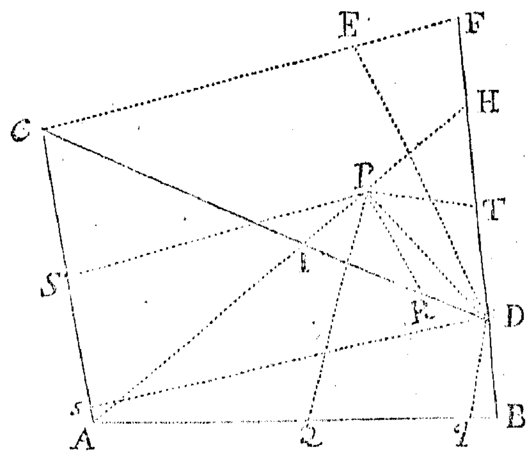
Scholium.

Nomen Conicæ ſectionis in hoc Lemmate late ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea per verticem Coni tranſiens, quam circularis baſi parallela includatur. Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* junguntur, Conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor P*Q*, P*R*, PS, P*T* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitq; rectangulum ſub duabus ductis PS x PR æquale rectangulo ſub duabus aliis PS x P*T*, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis & rectangulum ſub duabus ductis P*Q* x P*R* ſit ad rectangulum ſub aliis duabus PS x. P*T* ut rectangulum ſub ſinubus angulorum S, *T*, in quibus duæ ultimæ PS, P*T* ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ P*Q*, P*R* ducuntur. Cæteris in caſibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii *ABCD* ſubſtitui poteſt quadrilaterum cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* poſſunt unum vel duo abire in infinitum, eoq; pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

Lemma XIX.

Invenire punctum P, a quo si rectæ quatuor P Q, P R, P S, P T ad alias totidem positione datas rectas A B, C D, A C, B D singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis, P Q x P R, sit ad rectangulum sub aliis duabus, P *S* x *P T, in data ratione.*

Lineæ *A* B, *C D*, ad quas rectæ duæ *P Q*, *P R*, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, B, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *A H*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *B D*, *C D*, nimirum *B D* in *H* & *C D* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *P Q* ad *P A* & *P A* ad *P S*, adeoq; ratio *P Q* ad *P S*. Auferendo hanc a data ratione *P Q* x *P R* ad *P S* x *P T*, dabitur ratio *P R* ad *P T*, & addendo datas rationes *P I* ad P *R*, & *P T* ad *P H* dabitur ratio *P I* ad *P H* atq; adeo punctum P. *Q. E. I.*

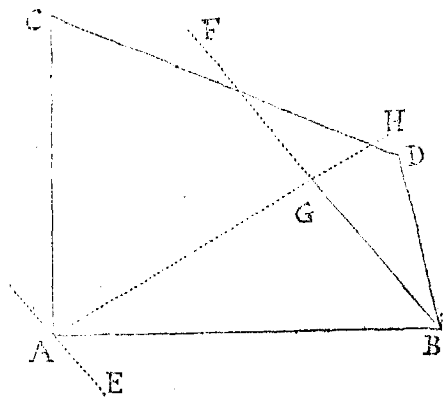


Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum P punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda P *D* ubi puncta P ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *A H* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *I P* & P *H* invenietur ut supra. Ipsi igitur *A D* duc parallelam *C F*, occurrentem B D in *F*, & in ea ultima ratione sectam in *E*,

&

& DE tangens erit, propterea quod CF & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc Loci tangentem AE, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam BF occurrentem Loco in *F*. Invenietur autem punctum F per Lemma superius. Biseca *BF* in *G*; & acta AG diameter erit ad quam BG & F G ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat Loco in *H*, & erit AH latus transversum, ad quod latus rectum est ut $BGq.$ ad AGH. Si AG nullibi occurrit Loco, linea AH existente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum ejus $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta *A* & *H* sita sunt ad easdem partes ipsius *G*: & Ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit & insuper B G *quad.* æquale rectangulo A G H, quo in casu circulus habebitur.



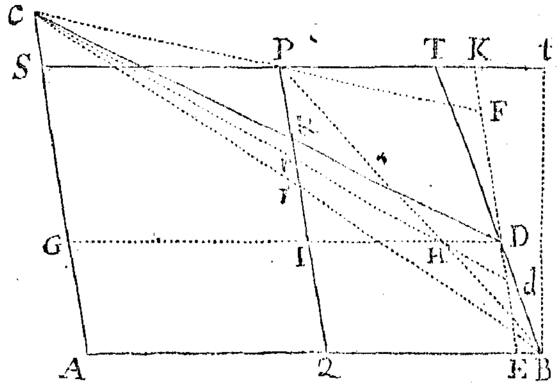
Atq; ita Problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

Lemma XX.

Si parallelogrammum quodvis $ASPQ$ *angulis duabus oppositis A & P tangit sectionem quamvis Conicam in punctis A & P, & lateribus unius angulorum illorum infinite productis AQ, AS occurrit eidem sectioni Conicæ in B & C; a punctis autem occur-*

suum B *&* C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* B *D*,C *D occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* P S, P *Q in T & R: erunt semper abscissæ laterum partes* P R *&* P *T ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum D tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor A, B*, P, *C transeuntem.*

Cas. 1. Jungantur B P, *C* P & a puncto *D* agantur rectæ duæ *D G*, *D E*, quarum prior *D G* ipsi *A B* parallela sit & occurrat P B, P *Q*, *C A* in *H*, *I*, *G*; altera *D E* parallela sit ipsi *A C* & occurrat P *C*, P *S*, A *B* in *F*,*K*,*E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum *D*E x *D F* ad rectangulum *D G* x *D H* in ratione data. Sed est P *Q* ad *D E* seu I *Q*, ut P *B* ad *H B*, adeoq; ut P *T* ad *D H*; & vicissim P *Q* ad P *T* ut *D E* ad *D H*. Est & P *R* ad *D F* ut *R C* ad *D C*, adeoq; ut *I G* vel P *S* ad *D G*, & vicissim P *R* ad P *S* ut *D* F ad *D G*; & conjunctis rationibus fit rectangulum P *Q* x P *R* ad rectangulum P *S* x P *T* ut rectangulum *D E* x *D* F ad rectangulum *D G* x *D H*, atq; adeo in data ratione. Sed dantur P *Q* & P S & propterea ratio P *R* ad P *T* datur. *Q. E. D.*



Cas. 2. Quod si P R & P *T* ponantur in data ratione ad invicem, tunc simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum *D E* x *D* F ad rectangulum *D G* x *D H* in ratione data, adeoq; punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta *A*, *B*, P, *C*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si agatur B *C* secans P *Q* in *r*, & in P *T* capiatur P *t* in ratione ad P *r* quam habet P *T* ad P *R*, erit *B t* Tangens Coni-

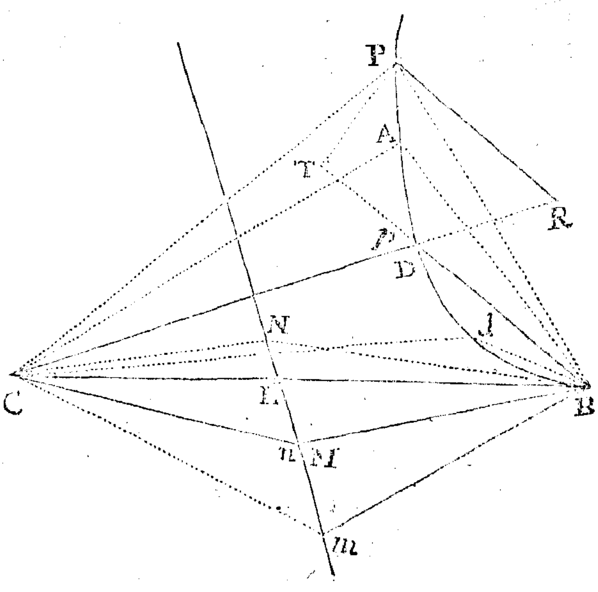
Conicæ sectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *B D* evanescente, *B T* Tangens evadet; & *C D* ac *B T* coincident cum *C* B & *B t*

Corol. 2. Et vice versa si B *t* sit Tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum *D* conveniant B *D*, *C D*; erit P *R* ad P *T* ut P *r* ad P *t*. Et contra, si sit P *R* ad P *T* ut P *r* ad P *t*, conveniunt B *D*, *C D* ad Conicæ sectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinq; puncta *A*, B, *C*, *D*, P, easq; secet recta B *D* in punctis *D*, *d*, & ipsam P *Q* secet recta *C d* in r. Ergo P *R* est ad P *T* ut P r ad P *T*, hoc est, P *R* & P r sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.

Lemma XXI.

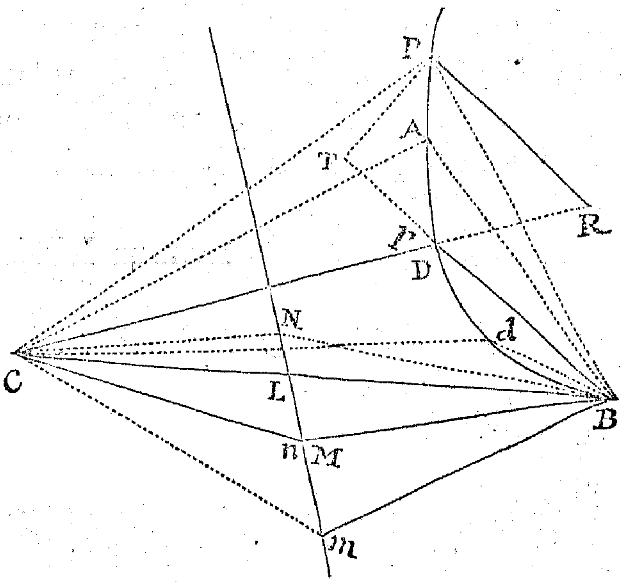
Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM per data puncta B, *C, ceu polos ductæ, concursu suo M describant tertiam positione datam rectam MN; & aliæ duæ infinitæ rectæ BD, CD cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, *C datos angulos M*B*D, MCD efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* B*D, CD concursu suo D describent sec-*



tionem

ionem Conicam. Et vice versa, si rectæ B *D*, *C D concursu suo D describant Sectionem Conicam per puncta* B, *C*, *A transeuntem*, *& harum concursus tunc incidit in ejus punctum aliquod A*, *cum alteræ duæ* B *M*, *C M coincidunt cum linea* B *C*, *punctum M continget rectam positione datam.*

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum P. Junge *C N*, B *N*, *C* P, B P, & a puncto P age rectas P *T*, P *R* occurrentes ipsis B D, *C* D in *T* & *R*, & facientes angulum B P *T* æqualem angulo B*N M* & angulum *C* P *R* æqualem angulo *C N M*. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli *M* B D, *N*BP, ut & anguli *M C* D, *N C* P: aufer communes *N B D* & *M C* P; & restabunt æquales *N B M* & P B *T*, *N C M* & P *C R*: adeoq; triangula *N B M*, P *B T* similia sunt, ut & triangula *N C M*, P *C R*. Quare P *T* est ad *N M* ut P B ad *N B*, & P *R* ad *N M* ut P *C* ad *N C*. Ergo P *T* & P *R* datam habent rationem ad *N M*, proindeq; datam rationem inter se, atq; adeo, per Lemma XX, punctum P (perpetuus rectarum mobilium B *T* & *C R* concursus) contingit sectionem Conicam. *Q. E. D.*



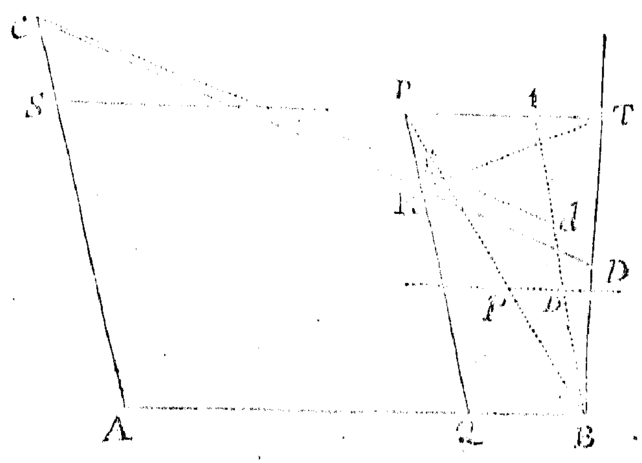
Et contra, si punctum *D* contingit sectionem Conicam transeuntem per puncta B, *C*, *A*, & ubi rectæ B *M*, *C M* coincidunt cum recta *B C*, punctum illud *D* incidit in aliquod sectionis punctum *A*;

A; ubi vero punctum *D* incidit successive in alia duo quævis sectionis puncta *p*, P, punctum mobile *M* incidit successive in puncta immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur recta *n N*, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, si fieri potest, versetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum *D* sectionem Conicam per puncta quinq; *C*, *p*, P, *B*, *A* transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum *D* sectionem Conicam per eadem quinq; puncta *C*, *p*, P, B, *A* transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinq; puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* versari in linea curva absurdum est. *Q.E.* D.

Prop. XXII. Prob. XIV.

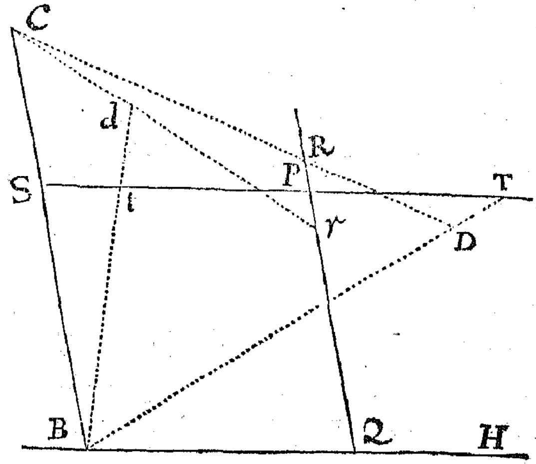
Trajectoriam per data quinq; puncta describere.

*D*entur puncta quinq; *A*, *B*, *C*, D, P. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, C, quæ poli nominentur, age rectas *A B*, *A C* hisq; parallelas TPS, P *R Q* per punctum quartum P. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum D infinitas duas *B* D *T*, *C R* D, novissime ductis T P S, P *R Q* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurentes in T & R. Deniq; de rectis P T, P *R*, acta recta *t r* ipsi T *R* parallela, abscinde quasvis



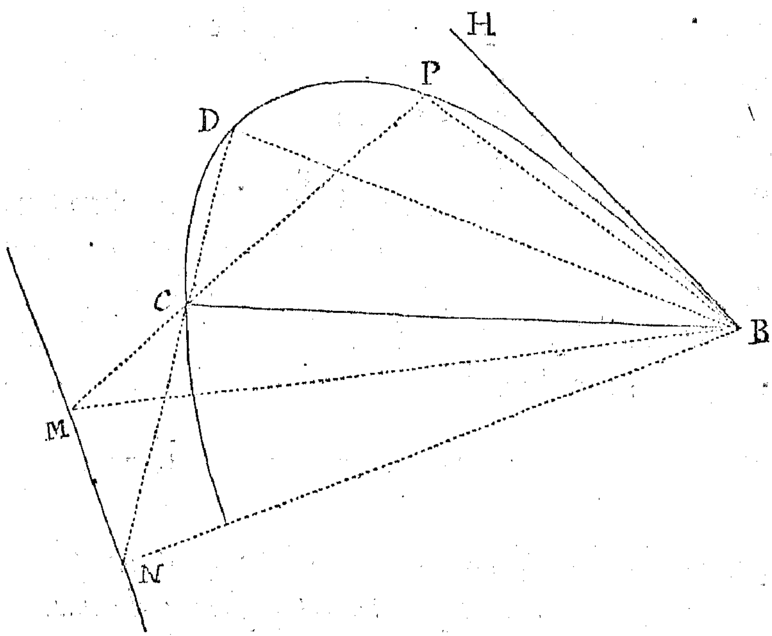
PAGES 80, 81 ARE MISSING

B*H*, & *P Q* parallelam B *C*, comple parallelogrammum B *S P Q*. Age B *D* ſecantem *S P* in *T*, & *C D* ſecantem *P Q* in *R*. Deniq; agendo quamvis *t r* ipſi *T R* parallelam, de *P Q*, *P* S abſcinde *P r*, *P t* ipſis P *R*, P *T* proportionales reſpective; & actarum *C r*, B*t* concurſus *d* (per Corol. 2. Lem. XX) incidet ſemper in Trajectoriam deſcribendam.



Idem aliter.

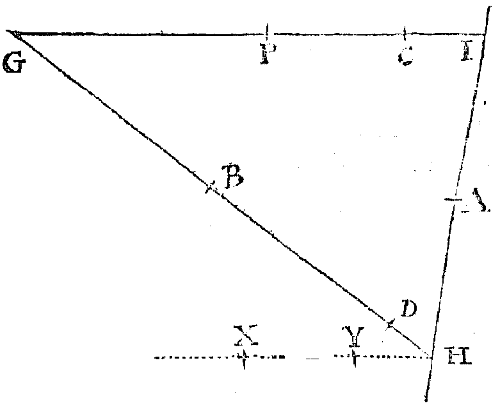
*R*evolvatur tum angulus magnitudine datus *C* B *H* circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinq; productus *D C* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N* in quibus anguli crus B *C* ſecat radium illum ubi crus alterum B *H* concurrit cum eodem radio in punctis *D* & P. Deinde ad actam infinitam *M N* concurrant perpetuo radius ille *C P* vel *C D* & anguli crus *C B*, & cru-



cruris alterius *BH* concursus cum radio delineabit *Trajectoriam* quæsitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo suo situ fiet tangens *BH*, atq; adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris B*H* concursus cum radio sectionem Conicam per puncta *C*, *D*, *P* transeuntem, & rectam B*H* tangentem in puncto B. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, P extra tangentem *HI* sita. Junge bina *BD*, *C*P concurrentia in *G*, tangentiq; occurrentia in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut sit *HA* ad *AI*, ut est rectangulum sub media proportionali inter B*H* & *H*-*D* & media proportionali inter *CG* & *G*P, ad rectangulum sub media proportionali inter P*I* & *IC* & media proportionali inter *DG* & *G*B, & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ P*I* parallela *HX*

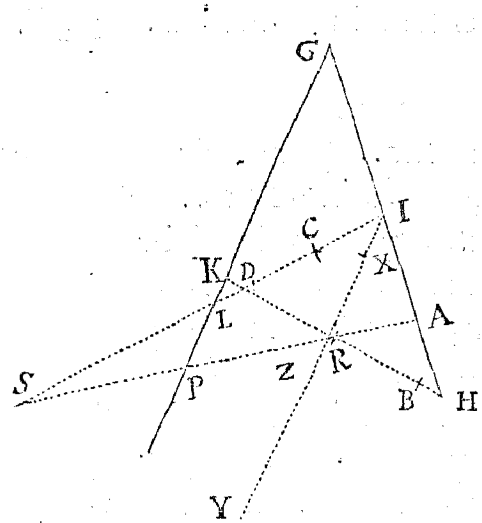


trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis) H*A quad.* ad *AI quad.* ut rectangulum *X*H*Y* ad rectangulum *B*H*D* (seu rectangulum *CG*P ad rectangulum *DG*B) & rectangulum *BH*D ad rectangulum P*IC* conjunctim. Invento autem contactus puncto *A*, describetur *Trajectoria* ut in casu primo. *Q. E. F.* Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta H & *I*, vel extra; & perinde *Trajectoria* dupliciter describi.

Prop. XXIV. Prob. XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta B, *C*, *D*. Age B*D* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*, & *C*D tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & S, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter B*H* & *HD* ad mediam proportionalem inter B*K* & K*D*; & *I*S ad *L*S ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Age *R*S secantem tangentes in *A* & P, & erunt *A* & P puncta contactus. Nam si per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I* agatur recta *IY* tangenti *KL* parallela & occurrens curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur I*Z* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex Conicis, rectangulum *XIY* (seu *IZ quad.*) ad *L*P *quad.* ut rectangulum *CI*D ad rectangulum *CL*D; id est (per constructionem) ut S*I quad.* ad S*L quad.* atq; adeo *IZ* ad *L*P ut S*I* ad S*L*. Jacent ergo puncta S, P, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *XIY* (seu I*Z quad.*) ad I*A quad.* ut *G*P *quad.* ad *GA quad.*, adeoq; I*Z* ad I*A* ut *G*P ad *GA*. Jacent ergo puncta P, *Z* & *A* in una recta, adeoq; puncta S, P & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, P & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactus *A* & *P* in recta S*R*.



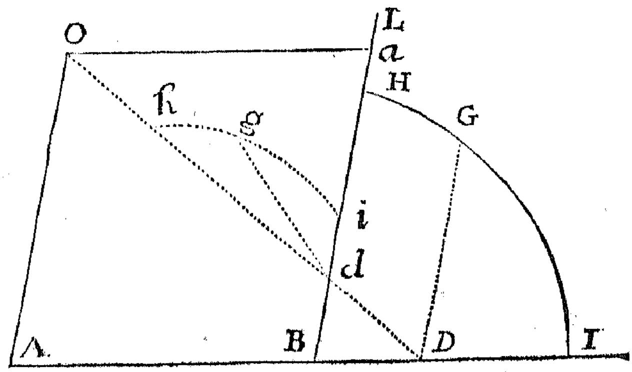
Hisce

Hiſce autem inventis, Trajectoria deſcribetur ut in caſu primo Problematis ſuperioris. *Q. E. F.*

Lemma XXII.

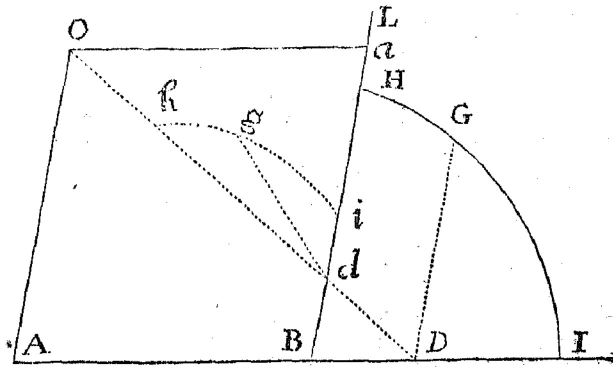
Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO, BL tertiam quamvis poſitione datam AB ſecantes in A & B, & a figuræ puncto quovis G, ad rectam AB ducatur GD, ipſi OA parallela. Deinde a puncto aliquo O in linea OA dato ad punctum D ducatur recta OD, ipſi BL occurrens in d; & a puncto occurſus erigatur recta gd, datum quemvis angulum cum recta BL continens, atq; eam habens rationem ad Od quam habet GD ad OD; & erit g punctum in figura nova hgi puncto G reſpondens. Eadem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratia nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; BD abſciſſam primam, Bd abſciſſam novam; O polum, OD radium abſcindentem, OA radium ordinatum primum & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.



Dico jam quod ſi punctum G tangit rectam lineam poſitione datam, punctum g tanget etiam lineam rectam poſitione datam.

Si punctum G tangit Conicam sectionem, punctum g tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro si punctum G tangit lineam tertii ordinis Analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum: Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut est ad ad OA ita sunt Od ad OD, dg ad DG, &



AB ad AD; adeoq; AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$ & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum D tangit rectam lineam, atq; adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata noua dg ad unicam tantum dimensionem ascendent, atq; adeo quæ designat lineam rectam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem ad & dg ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione secunda & AD, DG in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura

figura prima; hæc recta translata tanget lineam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata coibunt in figura nova, atq; adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur simul, evadent curvarum tangentes in figura utraq;. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope Curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo AO lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur Solutio quæsita.

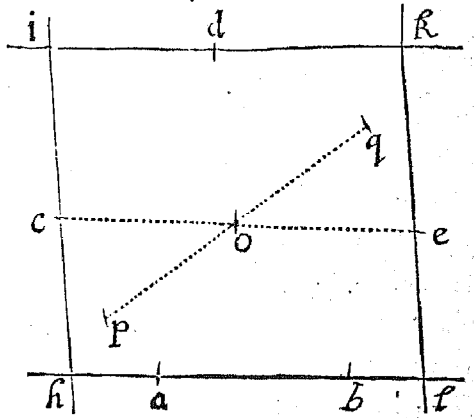
Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet unum earum in circulum. Recta item & sectio Conica in constructione planorum problematum vertuntur in rectam & circulum.

Prop. XXV. Prob. XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data

data tranſit, age rectam infinitam; eaq; adhibita pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo tranſeunti. Sunto hi, kl tangentes duæ parallelæ, ik tangens tertia, & hl recta huic parallela tranſiens per puncta illa a, b, per quæ Conica ſectio in hac figura nova tranſire debet, & parallelogrammum $hikl$ complens. Secentur rectæ hi, ik, kl in c, d & e, ita ut ſit hc ad latus quadratum rectanguli ahb, ic ad id, & ke ad kd ut eſt ſumma rectarum hi & kl ad ſummam trium linearum quarum prima eſt recta ik, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum ahb & alb: Et erunt c, d, e puncta contactus. Etenim, ex Conicis, ſunt hc quadratum ad rectangulum ahb, & ic quadratum ad id quadratum, & ke quadratum ad kd quadratum, & el quadratum ad alb rectangulum in eadem ratione, & propterea hc ad latus quadratum ipſius ahb, ic ad id, ke ad kd & el ad latus quadratum ipſius alb ſunt in dimidiata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium hi & kl ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli ahb & recta ik & latus quadratum rectanguli alb. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactus c, d, e, in figura nova. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per caſum primum Problematis XIV, deſcribetur Trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta a, b jacent vel inter puncta h, l, vel extra, debent puncta c, d, e vel inter puncta h, i, k, l capi, vel extra. Si punctorum a, b alterutrum cadit inter puncta h, l, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.



Prop.

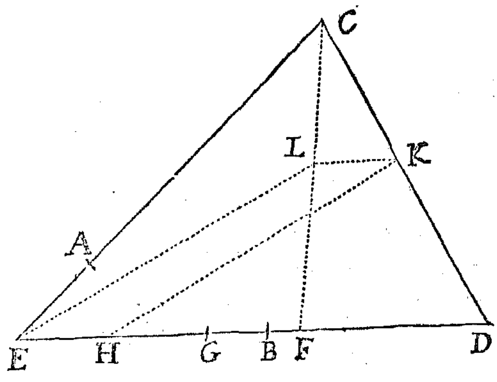
Prop. XXVI. Prob. XVIII.

Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura. (per Lem. XXII) in figuram novam, & Tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ hi & kl, ik & hl continentes parallelogrammum $hikl$. Sitq; p punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum O agatur pq, & existente Oq æquali Op, erit q punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q. E. F.*

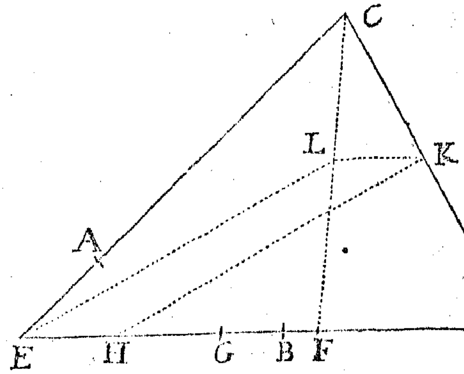
Lemma XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ AC, BD ad data puncta A, B terminentur, datamq; habeant rationem ad invicem, & recta CD, qua puncta indeterminata C, D junguntur, secetur in ratione data in K: dico quod punctum K locabitur in recta positione data.



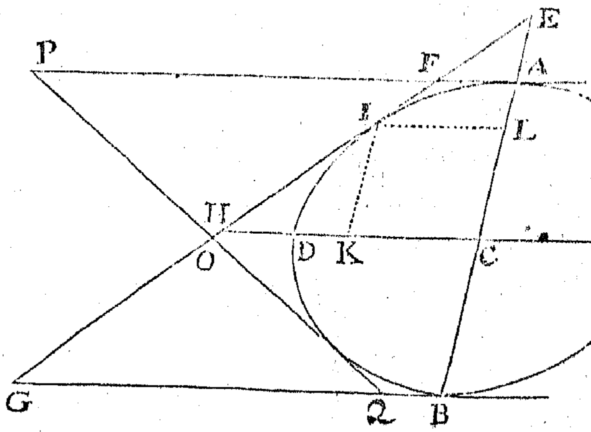
Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC, sitq; FD æqualis EG, & erit EC ad

G D, hoc eſt ad *E F* ut *A C* ad *B D*, adeoq; in ratione data, & propterea dabitur ſpecie triangulum *E F C*. Secetur *C F* in *L* in ratione *C K* ad *C D*, & dabitur etiam ſpecie triangulum *E F L*, proindeq; punctum *L* locabitur in recta E *L* poſitione data. Junge *L K*, & ob datam *F D* & datam rationem *L K* ad *F D*, dabitur *L K*. Huic æqualis capiatur *E H*, & erit E *L K H* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi latere poſitione dato *H K*. *Q. E. D.*



Lemma. XXIV.

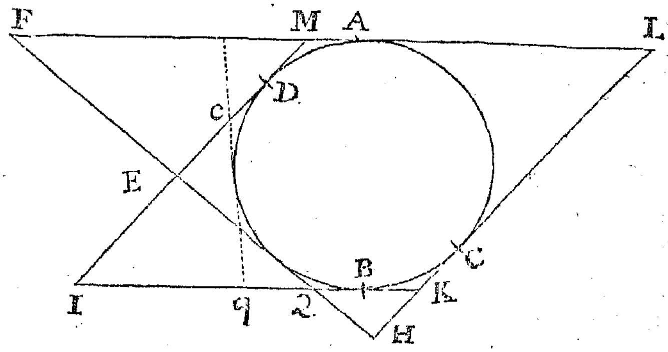
Si rectæ tres tangant quamcunq; coniſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.



Sunto *A F*, *G* B parallelæ duæ Coniſectionem *A D* B tangentes in *A* & B; E *F* recta tertia Coniſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G* ; ſitq; *C D* ſemidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *A F*, *C D*, B *G* ſunt continue proportionales. Nam

PAGE 91 IS MISSING

KL, MI sectionem Conicam in *A*, B, *C*, *D*, & secet tangens quinta F*Q* hæc latera in F, *Q*, *H* & E: dico quod sit ME ad MI ut BK ad *KQ*, & *KH* ad KL ut AM ad MF. Nam per Corollarium Lemmatis superioris, est ME ad EI ut AM seu BK ad BQ, & componendo ME ad MI ut BK ad KQ. Q. E. D. Item KH ad HL ut BK seu AM ad AF, & dividendo KH ad KL ut AM ad MF. *Q E. D.*



Corol. 1. Hinc si parallelogrammum IK*L*M datur, dabitur rectangulum KQ x ME, ut & huic æquale rectangulum KH x MF. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum KQH, MFE.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens *eq* tangentibus KI, MI occurrens in *e* & *q*, rectangulum KQ x ME æquabitur rectangulo K*q* x M*e*, eritq; KQ ad M*e* ut K*q* ad ME, & divisim ut *Qq* ad E*e*.

Corol. 3. Unde etiam si E*q*, *eQ* jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit *Qq* ad E*e* ut K*Q* ad *Me*, transibit eadem recta per medium omnium E*q*, *eQ*, *MK*; (per Lemma XXIII) & medium rectæ MK est centrum Sectionis.

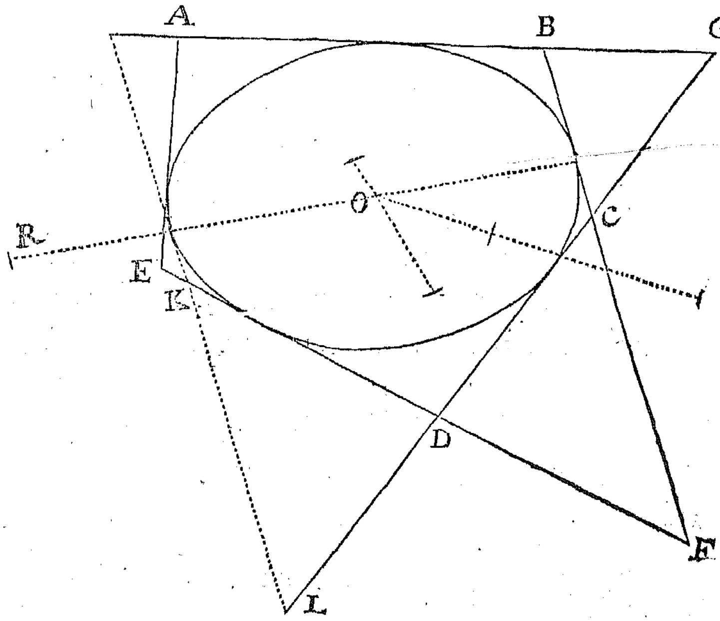
Prop. XXVII. Prob. XIX.

Trajectoriam describere quæ rectas quinq; positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, *EA*. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ *AB*-

FE

F E diagonales *A F*, *B* E biſeca, & (per Cor. 3. *Lem.* XXV) recta per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum Trajectoriæ. Rurſus figuræ quadrilateræ *B G D* F, ſub alijs quibuſvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *B-D*, *G F* biſeca, & recta per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum ſectionis. Dabitur ergo



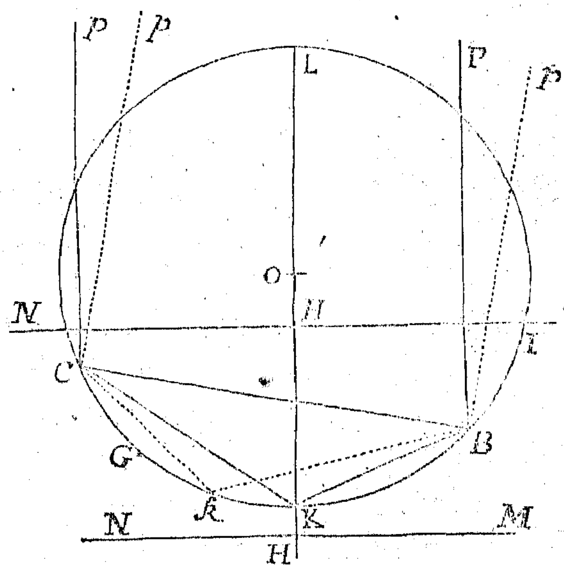
centrum in concurſu biſecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *B C* parallelam age *K L*, ad eam diſtantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *K L* tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas *C D*, F *D*-E in *L* & *K*. Per tangentium non parallelarum *C L*, F *K* cum parallelis *C* F, *K L* concurſus *C* & *K*, F & *L* age *C K*, F *L* concurrentes in *R*, & recta *O R* ducta & producta ſecabit tangentes parallelas *C* F, *K L* in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Caſum 1. Prob. XIV. Trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.*

Scho-

Schol.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæq; tangentes, a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atq; constructiones Problematis XV & Casus primi Problematis XIV vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & Figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP* quorum concursu Trajectoria describebatur sint sibi invicem parallela, eumq; servantia situm revolvantur circa polos suos *B*, *C* in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concursu suo *K* vel *k*, circulum *IBKGC*. Sit circuli hujus centrum *O*.



Ab hoc centro ad Regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant dum Trajectoria describebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in K & *L*. Et ubi crura ra illa altera CK, BK concurrunt ad punctum istud K quod Regulæ propius est, crura prima CP, BP parallela erunt axi majori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles PCK, PBK. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, centroq; O & intervallo OH describendo circulum, & per punctum quartum agendo rectam quæ circulum illum tangat, dabitur regula MN cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione Conica inscribi potest.

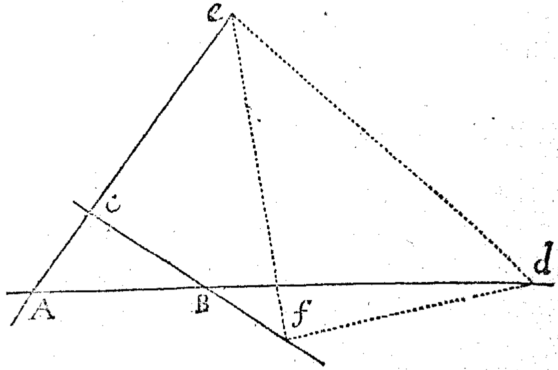
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atq; axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

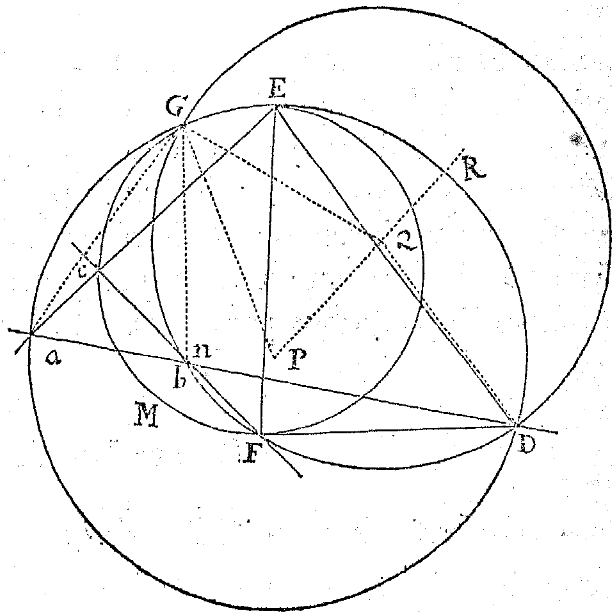
Lemma XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, an-

angulus E lineam *AC*, & angulus F lineam *BC* tangat. Super *D*E, *D*F & EF describe tria circulorum segmenta *DR*E, *DG*F, E*M*F, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *AB*C, *ACB* æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *D*E, *D*F, EF ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DG*F*D* eodem cum literis *ABCA*, & literæ E*M*FE eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant: deinde compleantur hæc segmenta in circulos. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintq; centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *D*-*G*E in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *a*E secans circulum tertium *G*E*c* in *c*. Et compleatur figura ~~*abc*-*DEF*~~ *ABC*-*def* similis & æqualis figuræ ~~*ABCdef*~~ *abcDEF*. Dico factum.





Agatur enim F*c* ipsi *aD* occurrens in *n*. Jungantur *aG*, *bG*.

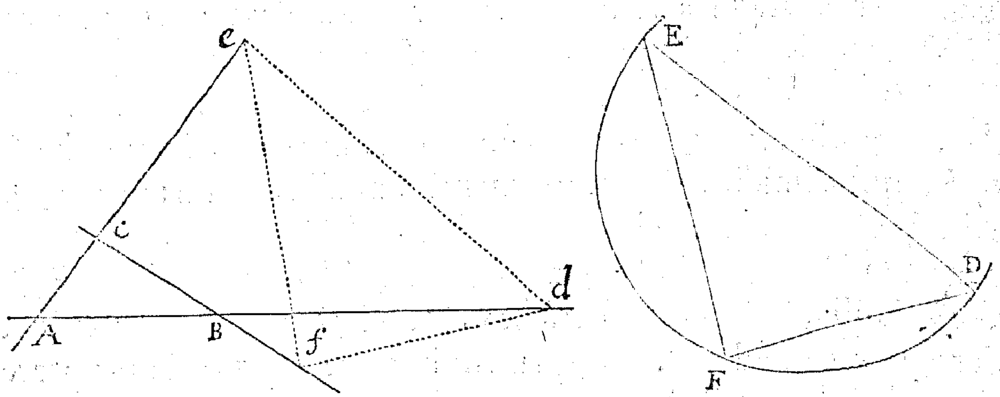
bG, PD, QD & producatur PQ ad R. Ex constructione est angulus EaD æqualis angulo CAB, & angulus EcF æqualis angulo ACB, adeoq; triangulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu FnD angulo ABC, adeoq; angulo FbD æqualis est, & propterea punctum n incidit in punctum b. Porro angulus GPQ, qui dimidius est anguli ad centrum GPD, æqualis est angulo ad circumferentiam GaD; & angulus GQR, qui dimidius est complementi anguli ad centrum GQD, æqualis est angulo ad circumferentiam GbD, adeoq; eorum complementa PQG, abG æquantur, suntq; ideo triangula GPQ, Gab similia, & Ga est ad ab ut GP ad PQ; id est (ex constructione) ut Ga ad AB. Æquantur itaq; ab & AB, & propterea triangula abc, ABC, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trianguli abc latera ab, ac, bc respective, compleri potest figura $ABCdef$ figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atq; eam complendo solvetur Problema. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe Triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE, rectis positione datis AB, AC, & pars data DF rectis positione datis AB, BC interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

Prop. XXVIII. Prob. XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ DEF, quaq; a rectis tribus AB, AC, BC positione datis, in partes datis hujus partibus *D* E & E *F* ſimiles & æquales ſecabitur. Age rectas *D* E, E *F*, *D F*, & trianguli hujus *D* E *F* pone angu-



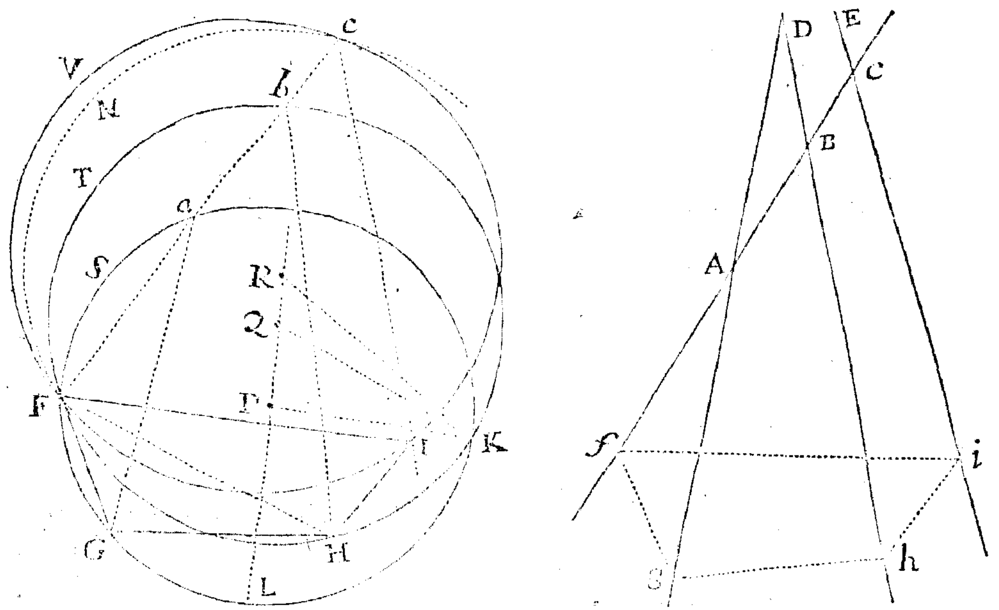
los *D*, E, *F* ad rectas illas poſitione datas: (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum deſcribe Trajectoriam curvæ *D E F* ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

Lemma XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas (quæ neq; omnes parallelæ ſunt, neq; ad commune punctum convergunt) ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *C*E, quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio *FGHI* ſimile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*, cæteriq; anguli *g*, *h*, *i* cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *C*E reſpective. Jungatur *FH*, & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta F S G, F *T* H, F *V I*; quorum primum F S *G* capiat angulum æqualem angulo *B AD*; ſecundum F *T H* capiat angulum æqualem angulo *C* B E; ac tertium F *V I* capiat angulum æqualem angulo *AC*-E.

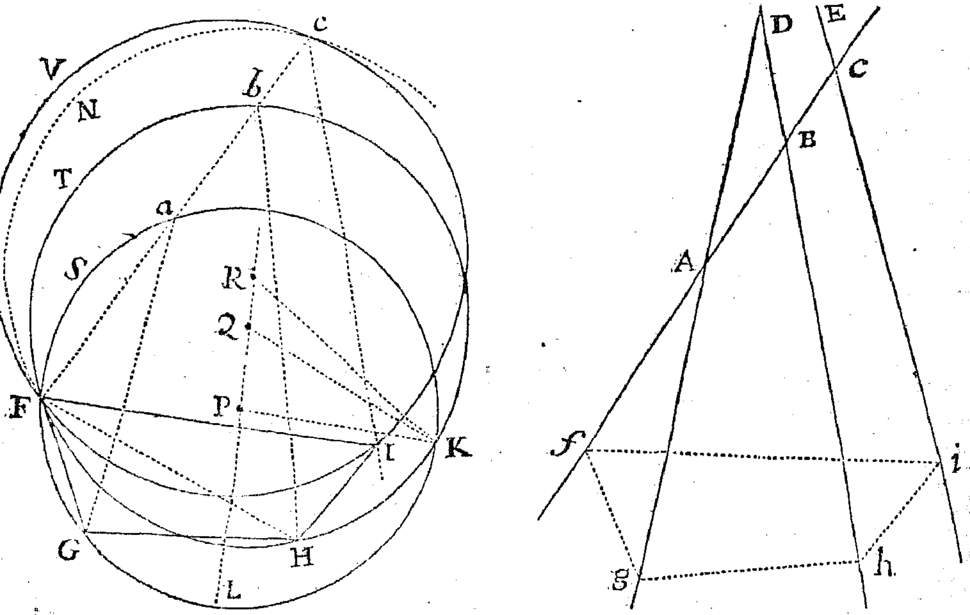
E. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum F *G*, F *H*, F *I*, ut literarum F S *G* F idem ſit ordo circularis qui literarum B *A D* B, utq; literæ F *T H* F eodem ordine cum literis *C* B-E *C*, & literæ F *V I* F eodem cum literis *A C* E *A* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos, ſitq; *P* centrum circuli primi F S *G*, & *Q* centrum ſecundi F *T H*. Jungatur & utrinq;



producatur *P Q*, & in ea capiatur *Q R* in ea ratione ad *P Q* quam habet B *C* ad *A* B. Capiatur autem *Q R* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem ſit ordo circularis atq; literarum *A*, B, *C*: centroq; *R* & intervallo *R* F deſcribatur circulus quartus F-*N c* ſecans circulum tertium F *V I* in *c*. Jungatur F *c* ſecans circulum primum in *a* & ſecundum in *b*. Agantur *a* G, *b H*, *c I*, & figuræ *a b c* F G *H I* ſimilis conſtituatur figura *A* B *C f g h i*: Eritq; Trapezium *f g h i* illud ipſum quod conſtituere oportuit.

Secent enim circuli duo primi F S G, F *T H* ſe mutuo in K. Jungantur *P K*, *Q K*, *R K*, *a K*, *b K*, *c K* & producatur *Q P* ad

L. Anguli ad circumferentias F*a*K, F*bK*, F*cK* sunt semisses angulorum F*P*K, F*QK*, F*RK* ad centra, adeoq; angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LR*K æquales. Est ergo figura *PQRK* figuræ *abc*K æquiangula & similis, & propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est ut *A*B ad B*C*. Angulis insuper F*a*G, *Fb*H, F*cI* æquantur *fAg*, *f*B*h*, *fCi* per constructionem.

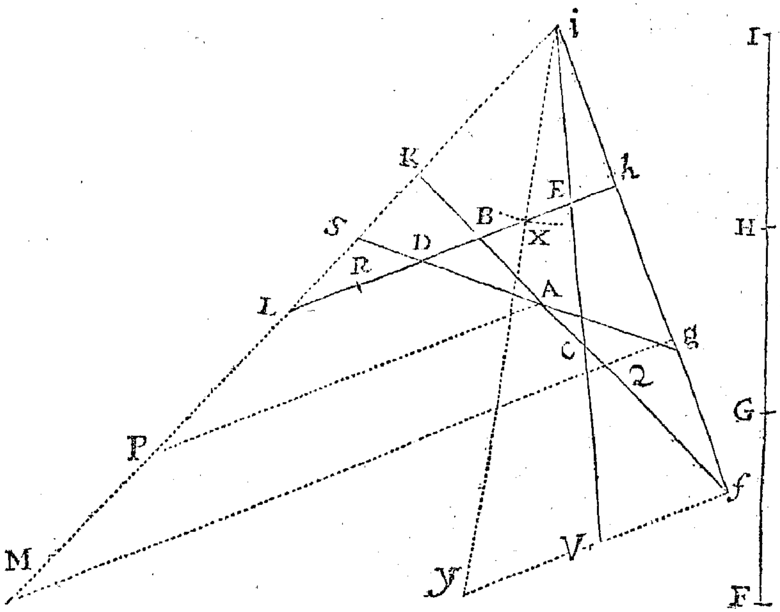


Ergo figuræ *abc* F*G*H*I* figura similis *A*B*Cfghi* compleri potest. Quo facto Trapezium *fghi* constituetur simile Trapezio F*GHI* & angulis suis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *AB*, *AD*, *BD*, *C*E. *Q*.E.F.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli F*G*H, *GHI* usq; eo, ut rectæ F*G*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc casu construendo Problema, ducetur recta *fghi* cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor positione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *C*E interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ F*G*, *GH*, *HI*, eundemq; servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Pro-

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut ſit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i. Producatur iL ad M, ut ſit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipſi LB parallela rectæq; AD occurrens in g, tum gi ſecans AB, BD in f, h. Dico factum.



Secet enim Mg rectam AB in Q, & AD rectam KL in S, & agatur AP, quæ ſit ipſi BD parallela & occurrat iL in P, & erunt Mg ad Lh (Mi ad Li, gi ad hi, AK ad BK) & AP ad BL in eadem ratione. Secetur DL in R ut ſit DL ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM, AS ad AP, & DS ad DL, erit ex æquo ut gS ad Lh ita AS ad BL & DS ad RL; & mixtim, $BL-RL$ ad $Lh-BL$ ut $AS-DS$ ad $gS-AS$. Id eſt BR ad Bh ut AD ad Ag, adeoq; ut BD ad gQ. Et viciſſim BR ad BD ut Bh ad gQ ſeu fh ad fg. Sed ex conſtructione eſt BR ad BD ut FH ad FG. Ergo fh eſt ad fg ut FH ad FG. Cum igitur ſit etiam ig ad ih ut Mi ad Li, id eſt, ut IG ad IH, patet lineas FI, fi in g & h, G & H ſimiliter ſectas eſſe. Q. E. F.

In conſtructione Corollarii hujus poſtquam ducitur LK ſecans

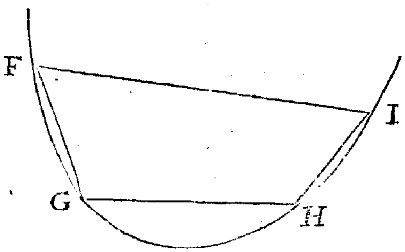
EC

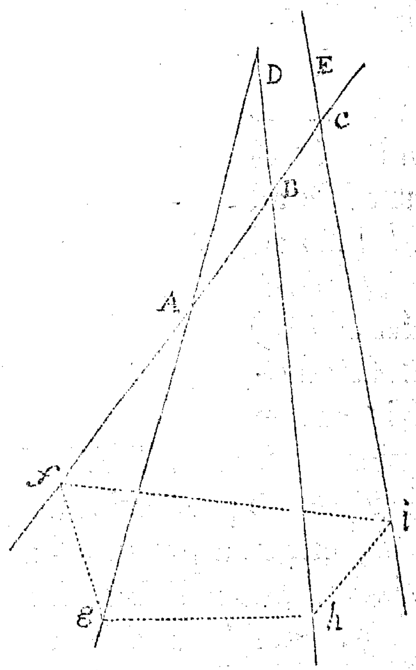
CE in *i*, producere licet *i* E ad *V*, ut ſit E *V* ad *i* E ut F *H* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipſi B *D*. Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo *IH* deſcribatur circulus ſecans B *D* in *X*, producatur *iX* ad *Y*, ut ſit *iY* æqualis *I* F, & agatur *Yf* ipſi B *D* parallela.

Prop. XXIX. Prob. XIX.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit Trajectoria *fghi*, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ F *GHI*, & cujus partes *fg*, *gh*, *hi* illius partibus F G, G *H*, *HI* ſimiles & proportionales, rectis *A*-B & *AD* *AD* & B *D*, B-*D* & E *C* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis F G, G *H*, H I, F I, deſcribatur Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio F G H I ſimile & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *A* B, *A D*, B *D*, *C* E ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein (per Lem. XXVII) circa hoc Trapezium deſcribatur Trajectoria curvæ lineæ F G H I conſimilis.





Scho-

Pages 103 and 104 are missing.

$\frac{3}{8}$HG x AS est 4 AS x M. Ergo area APS æqualis est 4 AS x M. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et circulo ASP per corpus movens perpetuo transeunte, velocitas puncti ~~G~~ H est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; adeoq; in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam viceversa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ G*H* occurrens in *H*.

Lemma XXVIII.

Nulla extat figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea uniformi cum motu recta, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatq; semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem ~~longitudo~~ quadratum. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si area Oualis per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis est, adeoq; omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, adeoq; aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenitur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum Conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoq; & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones Sectionum Conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & pluſquam ſolida ad ſolida. Eadem de cauſa interſectiones binæ rectarum & ſectionum Conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & curvarum tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo interſectiones numero infinitæ rectarum, propterea quod omnium eadem eſt lex & idem calculus, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus omnes poſſunt ſimul exhiberi. Si a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæq; prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoq; una eademq; exhibebit interſectiones

ones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi.

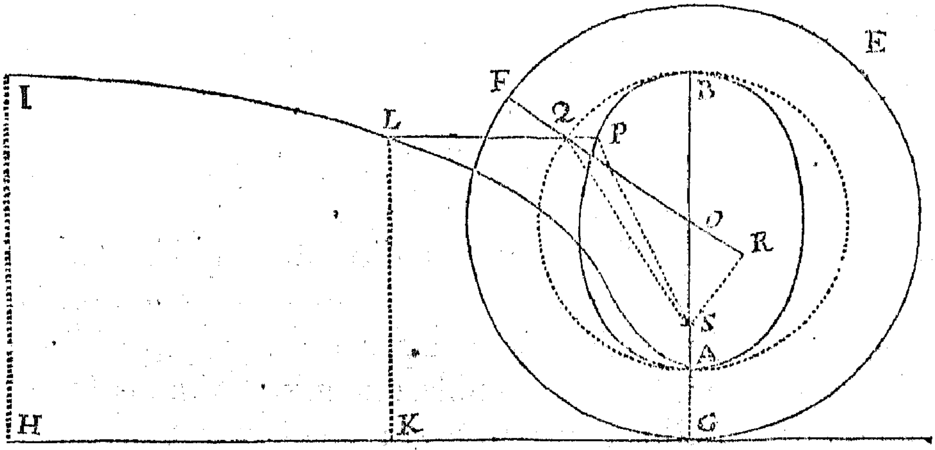
Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam, & propterea per descriptionem Curuarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasq; (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometrice irrationalem ut sequitur.

Prop. XXXI. Prob. XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moventis invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, O centrum, sitq; P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G ut sit OG ad ad OA ut OA ad OS. Erige perpendiculum GH, centroq; O & intervallo OG deſcribe circulum EFG, & ſuper regula GH, ceu fundo, progrediatur rota GEF revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo A deſcribendo Trochoidem ALI. Quo facto, cape GK in ratione ad rotæ perimetrum $GEFG$, ut eſt tempus quo corpus progrediendo ab A deſcripſit arcum AP, ad tempus



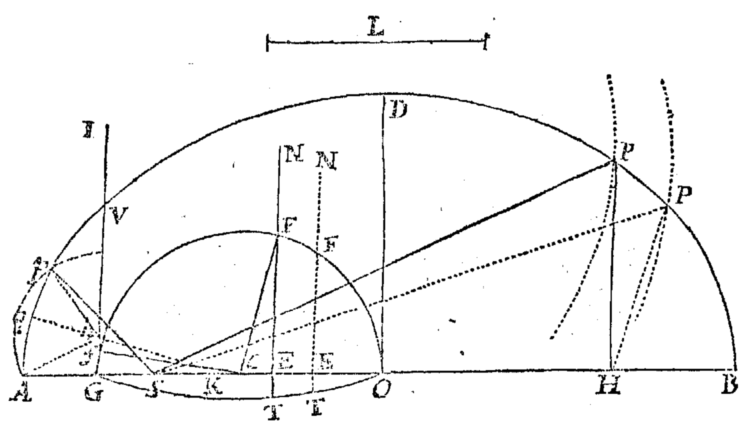
revolutionis unius in Ellipſi. Erigatur perpendiculum KL occurrens Trochoidi in L, & acta LP ipſi KG parallela occurret Ellipſi in corporis loco quæſito P.

Nam centro O, intervallo OA deſcribatur ſemicirculus AQB, & arcui AQ occurrat LP producta in Q, junganturq; SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR. Area APS eſt ut area AQS, id eſt, ut differentia inter ſectorem OQA & triangulum OQS, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2} OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2} OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2} OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, adeoq; (ob æqualitatem rationum SR ad ſinum arcus AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad GF, & diviſim $AQ - SR$ ad $GF -$ ſin. arc. AQ) ut GK differentia inter arcum GF & ſinum arcus AQ. Q. E. D.

Scho-

Scholium.

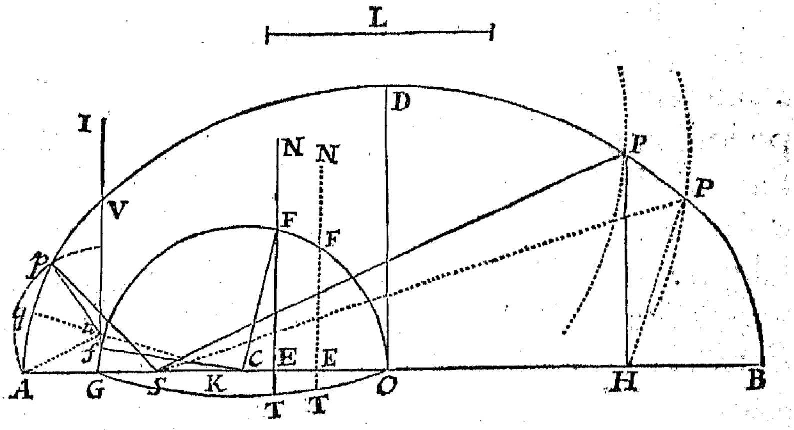
Cæterum ob difficultatem deſcribendi hanc curvam præſtat conſtructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere. Ellipſeos cujuſvis A*PB* ſit A*B* axis major, *O* centrum, *S* umbilicus, *OD* ſemiaxis minor, & *AK* dimidium lateris recti. Secetur *A*S in *G*, ut ſit AG ad AS ut *BO* ad *B*S; & quæratur longitudo *L*, quæ ſit ad $\frac{1}{2}$ *GK* ut eſt *AO quad.* ad rectangulum *AS* x *OD*. Biſecetur *OG* in *C*, centroq; *C* & intervallo *C* G deſcribatur ſemicirculus *GFO*. Deniq; capiatur angulus *GCF* in ea ratione ad angulos quatuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus deſcripſit arcum quæſitum *AP*, ad tempus periodicum ſeu revolutionis unius in Ellipſi: Ad *AO* demittatur normalis *FE*, & producatur eadem verſus F ad uſq; *N*, ut ſit *EN* ad longitudinem *L*, ut anguli illius ſinus *EF* ad radium *CF*; centroq; *N* & intervallo *AN* deſcriptus circulus ſecabit Ellipſin in corporis loco quæſito *P* quam proxime.



Nam completo dimidio temporis periodici, corpus *P* ſemper reperietur in Apſide ſumma *B*, & completo altero temporis dimidio, redibit ad Apſidem imam, ut oportet. Ubi vero proxime abeſt ab Apſidibus, ratio prima naſcentium ſectorum ASP, GCF, & ratio ultima evaneſcentium *BSP* & *OCF*, eadem eſt rationi Ellipſeos totius ad circulum totum. Nam punctis

P,

P, F & N incidentibus in loca p, f & n axi AB quam proximis; ob æquales An, pn, recta nq, quæ ad arcum Ap perpendicularis eſt, adeoq; concurrit cum axe in puncto K, biſecat arcum Ap. Proinde eſt $\frac{1}{2}$ Ap ad Gn ut AK ad GK, & Ap ad Gn ut $2\,AK$ ad GK. Eſt & Gn ad Gf ut EN ad EF, ſeu L ad CF, id eſt, ut $\frac{GK \times AOq.}{2\,AS \times OD}$ ad CF, ſeu $GK \times AOq.$ ad $2\,AS \times OD \times CF$, & ex æquo Ap ad Gf ut $2\,AK$ ad $GK + GK \times AOq.$ ad $2\,AS \times OD \times CF$, id eſt, ut $AK \times AOq.$ ad $AS \times OD \times CF$, hoc eſt, ob æqualia $AK \times AO$ & $ODq.$ ut $AO \times OD$ ad $AS \times CF$. Proinde $Ap \times \frac{1}{2} AS$ eſt ad $Gf \times \frac{1}{2} GC$ ut $AO \times OD \times AS$ ad $AS \times CF \times GC$, ſeu $AO \times OD$ ad $CGq.$ id eſt, ſector naſcens ASp ad ſectorem naſcentem GCf ut $AO \times OD$ ad $CGq.$ & propterea ut area Ellipſeos totius ad aream circuli totius. *Q. E. D.* Argumento prolixiore probari poteſt analogia ultima in Sectoribus evaneſcentibus BSP, OCF: ideoq; locus puncti P prope Apſides ſatis accurate inventus eſt. In quadraturis error quaſi quingenteſimæ partis areæ Ellipſeos totius vel paulo major obvenire ſolet: qui tamen propemodum evaneſcet per ulteriorem Conſtructionem ſequentem.



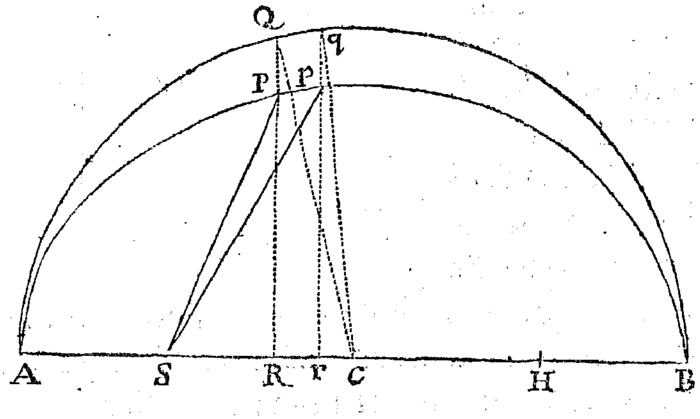
Per puncta G, O, duc arcum circularem GTO juſtæ magnitudinis; dein produc EF hinc inde ad T & N ut ſit EN ad FT ut $\frac{1}{2}$ L ad CF; centroq; N & intervallo AN deſcribe circulum qui ſecet Ellipſin in P, ut ſupra. Arcus autem GTO determinabitur

quæ-

quærendo ejus punctum aliquod T; quod constructionem in illo casu accuratam reddet.

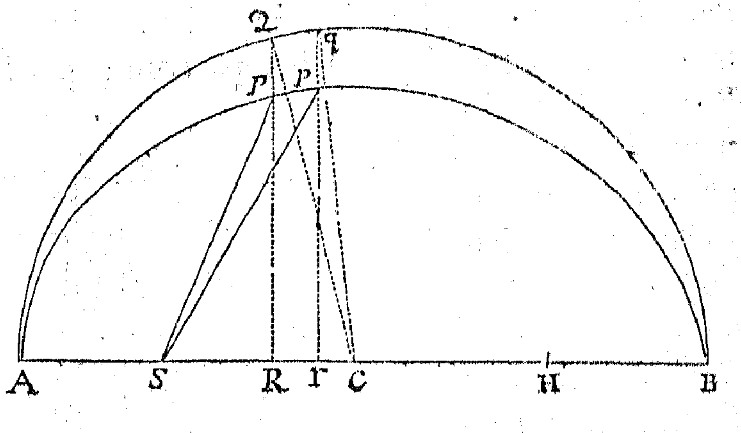
Si Ellipseos latus transversum multo majus sit quam latus rectum, & motus corporis prope verticem Ellipseos desideretur, (qui casus in Theoria Cometarum incidit,) educere licet e puncto G rectam GI axi AB perpendicularem, & in ea ratione ad GK quam habet area $AVPS$ ad rectangulum $AK \times AS$; dein centro I & intervallo AI circulum describere. Hic enim secabit Ellipsim in corporis loco quæsito P quamproxime. Et eadem constructione (mutatis mutandis) conficitur Problema in Hyperbola. Hæ autem constructiones demonstrantur ut supra, & si Figura (vertice ulteriore B in infinitum abeunte) vertatur in Parabolam, migrant in accuratam illam constructionem Problematis. XXII.

Si quando locus ille P accuratius determinandus sit, inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57,29578 quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia SH ad Ellipseos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem superiorem (vel utcunq; conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P quam proxime. Demissaq; ad axem Ellipseos ordinatim applicata PR, ex proportione diametrorum Ellipseos, dabitur circuli circumscripti AQB ordinatim applicata RQ, quæ sinus est anguli ACQ existente



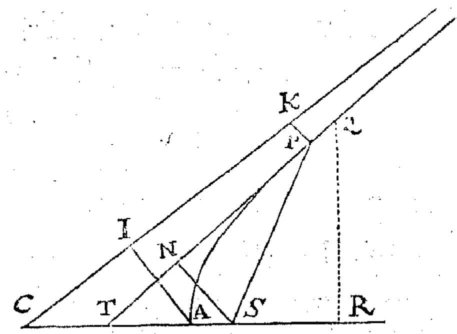
te

te AC radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori porportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos ut eſt tempus quo corpus deſcripſit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli ACQ ad Radium, & angulus E ad angulum $N - ACQ + D$, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli $ACQ + \frac{1}{2} D$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $ACQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - ACQ - E + F$ ut eſt longitudo L ad Longitudinem eandem coſinu anguli $ACQ + E + \frac{1}{2} F$ diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $ACQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - ACQ - E - G + H$, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli $ACQ + E + G + \frac{1}{2} H$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Deniq; capiatur angulus ACq æqualis angulo $ACQ + E + G + I$ &c. & ex coſinu ejus Cr & ordinata pr, quæ eſt



ad ſinum qr ut Ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Siquando angulus $N - ACQ + D$ negativus eſt, debet ſignum $+$ ipſius E ubiq; mutari in $-$, & ſignum $-$ in $+$. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli $N - ACQ - E + F$, & $N - ACQ - E - G + H$ negativi tive prodeunt. Convergit autem ſeries infinita $ACQ+E+G+I$ quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS ſit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium CQ perpendiculariter demiſſam.

Non diſſimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus centrum C, Vertex A, Umbilicus S & Aſymtotos CK. Cognoſcatur quantitas areæ APS tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ SP, quæ aream illam abſcindat quamproxime. Jungatur CP, & ab A & P ad Aſymptoton agantur AI, PK Aſymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eiq; æqualis area CPA, quæ ſubducta de triangulo CPS relinquet aream APS. Applicando arearum A & APS ſemidifferentiam $\frac{1}{2}APS-\frac{1}{2}A$ vel $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis eſt, orietur longitudo PQ. Capiatur autem PQ inter A & P, ſi area APS major ſit area A, ſecus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratius. Et computatione repetita invenietur idem accuratius in perpetuum.



Atq; his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum uſibus Aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, (*Vide fig. pag.* 109. 110.) & L ipſius latere recto, quære tum angulum Y, cujus Tangens ſit ad Radium ut eſt ſemiaxium differentia $AO-OD$ ad eorum ſummam $AO+OD$; tum angulum Z, cujus tangens ſit ad Radium ut rectangulum ſub umbilicorum diſtantia SH & ſemiaxium differentia $AO-OD$ ad triplum rectangulum ſub OQ ſemiaxe minore & $AO-\frac{1}{4}L$ differentia inter ſemiaxem majorem & quartam partem lateris recti. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum *T* proportionalem tempori quo arcus *B* P descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum *V* (primam medii motus æquationem) ad angulum *Y* (æquationem maximam primam) ut est sinus anguli *T* duplicati ad radium; atq; angulum *X* (æquationem secundam) ad angulum *Z* (æquationem maximam secundam) ut est sinus versus anguli T duplicati ad radium duplicatum, vel (quod eodem recidit) ut est quadratum sinus anguli *T* ad quadratum Radii. Angulorum *T*, *V*, *X* vel summæ $T+X+V$, si angulus *T* recto minor est, vel differentiæ $T+X-V$, si is recto major est rectisq; duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) & si *HP* occurrat Ellipsi in P, acta *S* P abscindet aream *BS* P tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum *V* & *X* (in minutis secundis, si placet, positorum) figuras duas tresve primas invenire sufficit. Invento autem angulo motus medii æquati *BH* P, angulus veri motus *HS* P & distantia *S* P in promptu sunt per methodum notissimam Dris. *Sethi Wardi* Episcopi *Salisburiensis* mihi plurimum colendi,

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

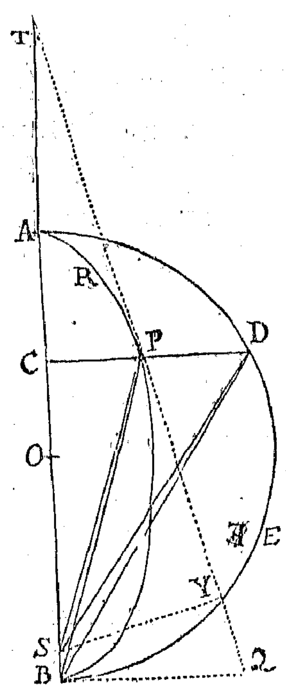
SECT. VII.

De Corporum Aſcenſu & Deſcenſu Rectilineo.

Prop. XXXII. Prob. XXIV.

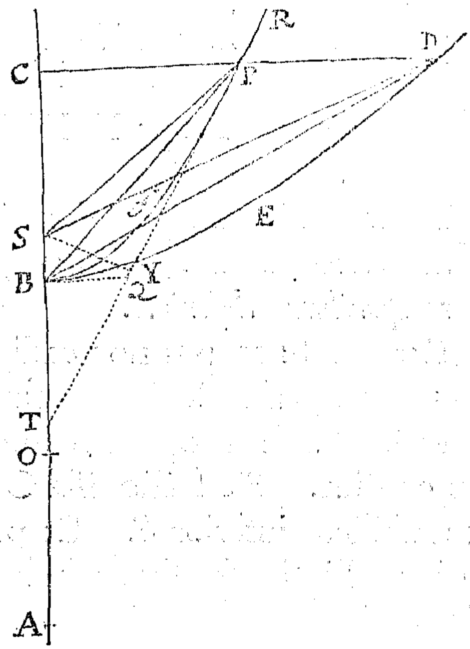
Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſpatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.

Caſ. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter deſcribet id ſectionem aliquam Conicam cujus umbilicus inferior congruit cum centro. Id ex Propoſitionibus XI, XII, XIII & earum Corollariis conſtat. Sit ſectio illa Conica *AR*PB & umbilicus inferior *S*. Et primo ſi Figura illa Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *D*P*C* perpendicularis ad axem; actiſq; *D*S, PS erit area *ASD* areæ *A*SP atq; adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe *A*P*B* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico S cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaq; ſpatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*



Caſ.

Cas. 2. Sin figura superior *R* P *B* Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BD*: & quoniam areæ *C* S P, *C B f* P, S P *f B* sunt ad areas *C*-S *D*, *C B E D*, S *D E B*, singulæ ad singulas, in data ratione altitudinum *C* P, *C D*; & area S P *f B* proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum *P B*, erit etiam area S *D E B* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *R* P *B* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus P *B* cum recta *C B*, & umbilicus S cum vertice *B* & recta S *D* cum recta *B D*. Proinde area *B D E B* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*



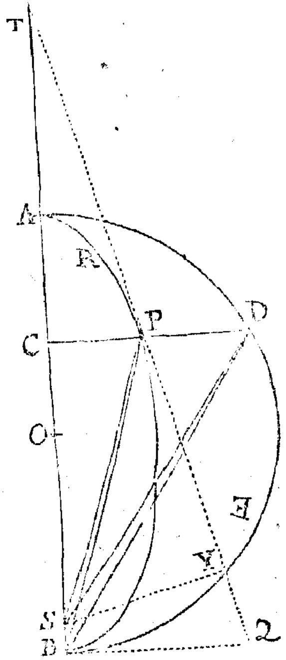
Cas. 3. Et simili argumento si figura *R* P *B* Parabola est, & eodem vertice principali *B* describatur alia Parabola B *E D*, quæ semper maneat data, interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus Latere recto, conveniat cum linea *C* B; fiet segmentum Parabolicum B *D E* B proportionale tempori quo corpus illud P vel *C* descendet ad centrum B. *Q. E. I.*

Prop. XXXIII. Theor. IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B *intervallo* B C *circulum describentis, in dimidiata ratione quam C A, distantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ vertice ulteriore A, habet ad figuræ semidiametrum principalem* ½ *A*B.

Nam-

Namq; ob proportionales *CD*, *C* P, linea *A* B communis est utriusq; figuræ *R* P B, *D E* B diameter. Bisecetur eadem in *O*, & agatur recta P *T* quæ tangat figuram *R* P B in P, atq; etiam secet communem illam diametrum *A* B (si opus est productam) in *T*; sitq; S *Y* ad hanc rectam & B *Q* ad hanc diametrum perpendicularis, atq; figuræ *R* P B latus rectum ponatur *L*. Constat per Cor. 9. Theor. VIII. quod corporis in linea *R* P B circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo S P circa idem centrum circulum describentis in dimidiata ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad SY quadratum. Est autem ex Conicis *AC* B ad *C* P*q*. ut 2 *AO* ad *L*, adeoq; $\frac{2\,CPq. \times AO}{ACB}$ æquale *L*. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in dimidiata ratione $\frac{CPq. \times AO \times SP}{ACB}$ ad S *Y* *quad.* Porro ex Conicis est *CO* ad B *O* ut B *O* ad *TO*, & composite vel divisim ut *CB* ad *BT*. Unde dividendo vel componendo fit *B O* — uel + *CO* ad B*O* ut *C T* ad *BT*, id est A *C* ad A *O* ut *C* P ad B *Q*; indeq; $\frac{CPq. \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq. \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ *R* P B latitudo *C* P, sic ut punctum P coeat cum puncto *C*, punctumq; S cum puncto B, & linea S P cum linea B *C*, lineaq; *SY* cum linea B *Q*; & corporis jam recta descendentis in linea *CB* velocitas fiet ad velocitatem corporis centro *B* intervallo *BC* circulum describentis, in dimidiata ratione ipsius $\frac{BQq. \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad S *Y* *q*. hoc est (neglectis æqualitatis rationibus S P ad *BC* & *BQq*. ad S *Y* *q*.) in dimidiata ratione A *C* ad A *O*. *Q. E. D.*

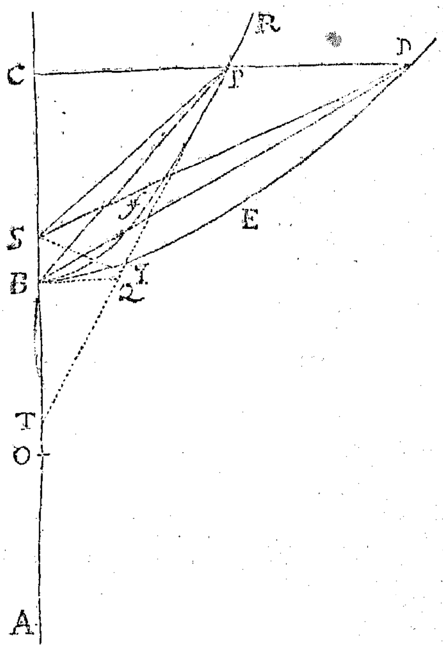


Corol.

Corol. Punctis *B* & S coeuntibus, fit *TC* ad S*T* ut A*C* ad A *O*.

Prop. XXXIV. Theor. X.

Si figura B E D Parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati qua corpus centro B dimidio intervalli sui BC circulum uniformiter describere potest.



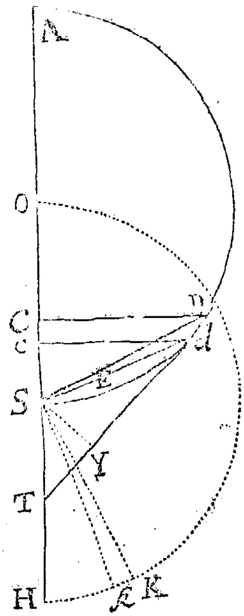
Nam corporis Parabolam *R*-P*B* circa centrum S describentis velocitas in loco quovis S (per Corol. 7. Theor. VIII) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli S P circulum circa idem S uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo ℞B in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *C* P cum recta *C B*, centrum S cum vertice *B*, & intervallum S P cum intervallo ℞P coincidat, & constabit Propositio. *Q. E. D.*

Prop. XXXV. Theor. XI.

Iisdem positis, dico quod area figuræ DES, radio indefinito SD descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ DES æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *C c* cadendo describere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo *O K k* circa centrum *S* gyrando, arcum *K k* describe bere. Erigantur perpendicula CD, cd occurrentia figuræ DES in D, d. Jungantur SD, SK, Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T, & ad eam demittatur perpendiculum SY.

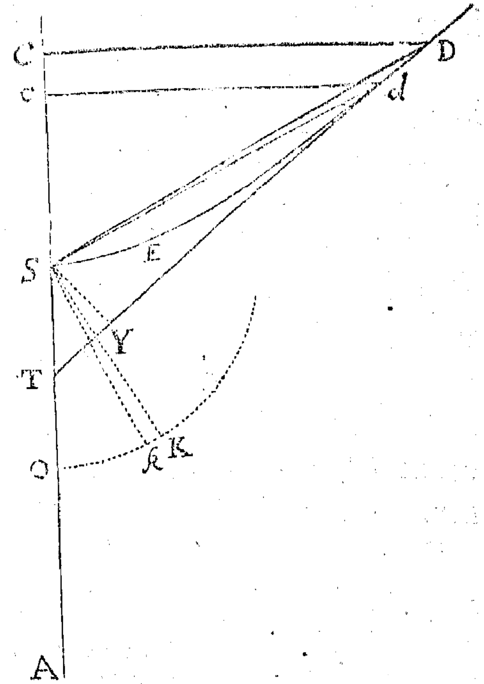
Caſ. 1 Jam ſi figura DES Circulus eſt vel Hyperbola, biſecetur ejus tranſverſa diameter AS in O, & erit SO dimidium Lateris recti. Et quoniam eſt TC ad TD ut Cc ad Dd, & TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed per Corol. Prop. 33. eſt TC ad ST ut AC ad AO, puta ſi in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC eſt ad AO, id eſt ad SK, ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in C eſt ad velocitatem corporis circulum intervallo SC circa centrum S deſcribentis in dimidiata ratione AC ad AO vel SK (per Theor IX.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum OKk in dimidiata ratione SK ad SC per Cor. 6. Theor. IV. & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola Cc ad arcum Kk in dimidiata ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeq; $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id eſt area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, SDd, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. Q. E. D.



Cas. 2. Quod ſi figura DES Parabola ſit, invenietur ut ſupra $CD \times Cc$ eſſe ad $SY \times Dd$ ut TC ad ST, hoc eſt ut 2 ad 1, adeoq; $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æqualem eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis caden-

tis

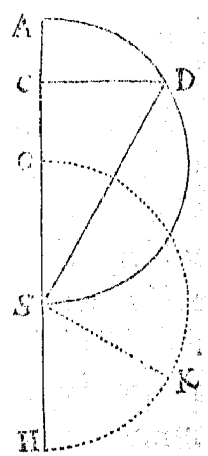
tis velocitas in C æqualis est velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2}SC$ uniformiter describi possit. (per Theor. X.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk est in dimidiata ratione SK ad $\frac{1}{2}Sc$, id est, in ratione SK ad $\frac{1}{2}CD$, per Corol. 6. Theorem. IV. Quare est $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}CD \times Cc$, adeoq; æquale $\frac{1}{2}ST \times Dd$, hoc est, area KSk æqualis Areæ SDd, ut supra. *Quod erat demonstrandum.*



Prop. XXXVI. Prob. XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.

Super diametro AS (distantia corporis a centro sub initio) describe semicirculum ADS, ut & huic æqualem semicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem constitue Sectorem OSK. Patet per Theor. XI, quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum OK. *Quod erat faciendum.*

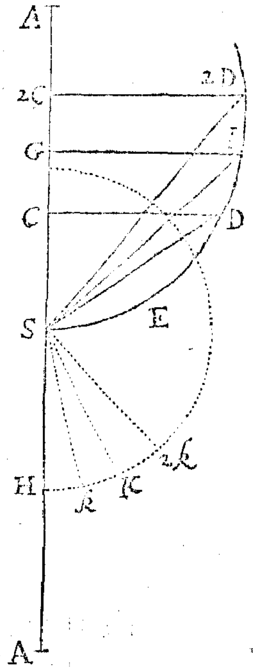


Prop. XXXVII. Prob. XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

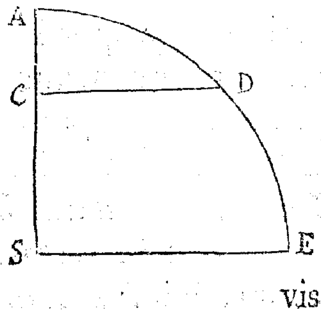
Ex-

Exeat corpus de loco dato G ſecundum lineam ASG cum velocitate quacunq;. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum SG circa centrum S revolvi poſſet, cape GA ad $\frac{1}{2}$ AS. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum A cadet ad infinitam diſtantiam, quo in caſu Parabola uertice S, axe SC, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per Theorema X. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu Circulus, poſteriore Hyperbola rectangula ſuper diametro SA deſcribi debet. Patet per Theorema IX. Tum centro S, intervallo æquante dimidium lateris recti, deſcribatur circulus HKk, & ad corporis aſcendentis vel deſcendentis loca duo quævis G, C, erigantur perpendicula GI, CD occurrentia Conicæ Sectioni vel circulo in I ac D. Dein junctis SI, SD, fiant ſegmentis $SEIS$, $SEDS$ Sectores HSK, HSk æquales, & per Theorema *XI.* corpus G deſcribet ſpatium GC eodem tempore quo corpus K deſcribere poteſt arcum Kk. Q. E. F.



Prop. *XXXVIII.* Theor. *XII.*

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus arcuumq; ſinibus verſis & ſinibus rectis reſpective proportionales.



Cadat corpus de loco quovis A ſecundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, deſcribatur circuli quadrans AE, ſitq; CD ſinus rectus arcus cujuſvis *AD*, & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo deſcribet ſpatium *AC*, inq; loco *C* acquiſierit velocitatem *CD*. Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione X. quo Propoſitio *XXXII.* ex Propoſitione *XI.* demonſtrata fuit. Q. E. D.

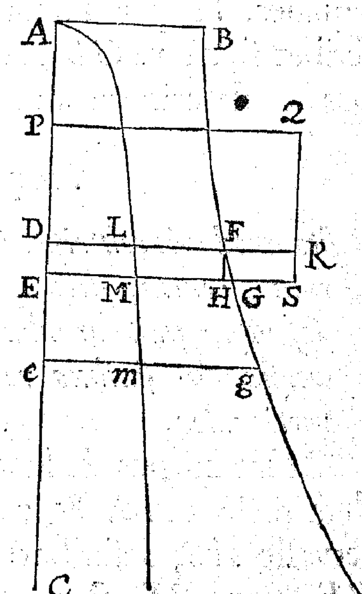
Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo provenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſq; centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

Prop. XXXIX. Prob. XXVII.

Poſita cujuſcunq; generis vi centripeta, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deq; loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitq; *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut areæ curvilineæ *ABGE* latus quadratum. *Q. E. I.* In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areæ *ABGE* reciproce proportionalis, & ſit *ALM* linea curva quam punctum *M* perpetuo tangit, & erit tempus quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE* ut area curvilinea *ALME*. *Quod erat Inveniendum.*



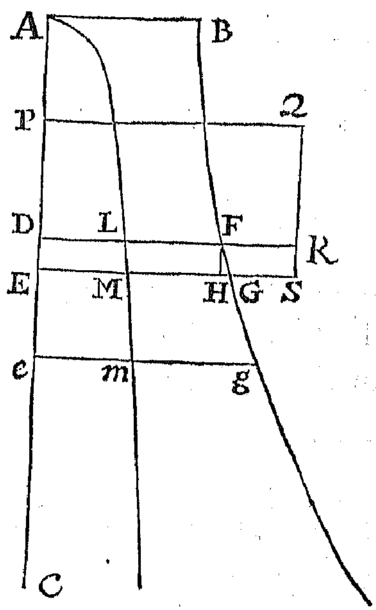
Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitq; *DLF* locus lineæ *EMG* ubi

ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut areæ $ABGE$ latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E scribantur V & $V+I$, erit area $ABFD$ ut V^2, & area $ABGE$ ut $V^2+2VI+I^2$, & divisim area $DFGE$ ut $2VI+I^2$, adeoq; $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2I\times V+I^2}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2I\times V}{DE}$, adeoq; etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I\times V}{DE}$. Est autem tempus quo corpus cadendo describit lineolam DE, ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estq; vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoq; si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I\times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF. Ergo vis ipsi DF vel EG proportionalis facit corpus ea cum velocitate descendere quæ sit ut areæ $ABGE$ latus quadratum Q. E. D.

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE describatur, sit ut velocitas inverse, adeoq; ut areæ $ABFD$ latus quadratum inverse; sitq; DL, atq; adeo area nascens $DLME$, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE describitur ut area tota AME. Q. E. D.

Corol. 1. Si P sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi ui centripeta nota (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunq; cadens acquisivit eodem loco D, & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum $PDRQ$, eiq; æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namq; completo rectangulo

EDRS, cum sit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut *VV* ad 2 *V* x *I*, adeoq; ut ½ *V* ad *I*, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintq; incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, adeoq; ut areæ nascentes *DFGE*, *DRSE*; erunt (ex æquo) areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.



Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunq; *D* data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut est latus quadratum rectanguli *PQRD* area curvilinea *DFge* vel aucti, si locus *e* est loco *D* inferior, vel diminuti, si is superior est, ad latus quadratum rectanguli solius *PQRD*, id est ut $\sqrt{PQRD + \text{vel} - DFge}$ ad $\sqrt{PQRD}$.

Corol. 3. Tempus quoq; innotescet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel − *DFge*, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum 2 *PD* x *DL*. Namq; tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam *PD* est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam *PE* in dimidiata ratione *PD* ad *PE*, id est (lineola *DE*

jam-

jamjam nascente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2} DE$ seu $2 PD$ ad $2 PD + DE$, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2 PD$ ad DE, adeoq; ut rectangulum $2 PE \times DL$ ad aream $DLME$; estq; tempus quo corpus utrumq; descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2 PD \times DL$ ad aream $DLme$.

SECT. VIII.

De Inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuscunq; centripetis agitata revolventur.

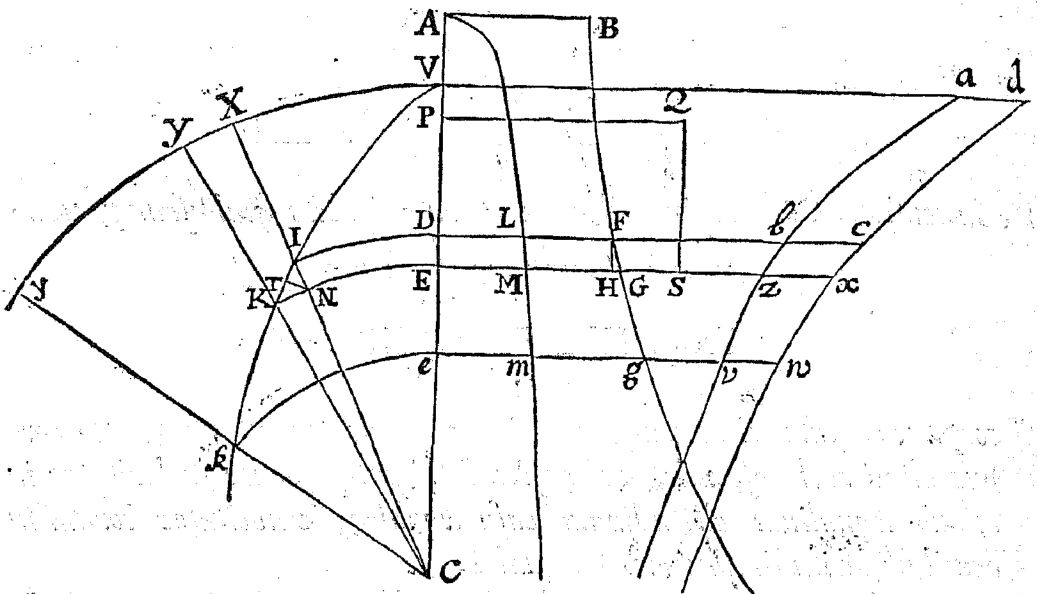
Prop. XL. Theor. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunq; centripeta, moveatur utcunq;, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq; eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales; velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$. Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæq; VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; sitq; circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam distantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & si vis una IN, per Legum Corol. 2. resolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo secundum lineam

NT

NT corporis curſui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietq; ipſum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inq; via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera *IT*, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus fac-



tæ (ſi ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, adeoq; accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & $IT \times IK$ rectangulum. Sed rectangulum $IT \times IK$ æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quadrato*; & propterea accelerationes in tranſitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K* & eodem argugumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. Q. E. D. Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel funipendulum oſcilletur, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintq; velocitates eorum in eadem quacunq; altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunq; æqualibus altitudinibus æquales. Namq; impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

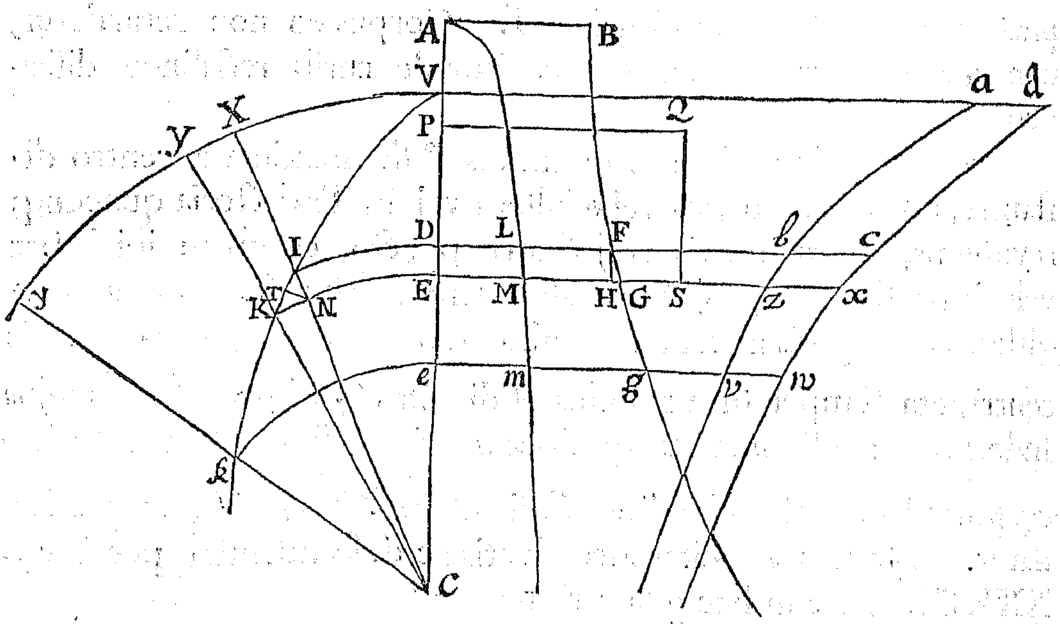
Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in Trajectoria quacunq; revolvens, deq; quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitq; quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis Orbis puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus Index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$, atq; adeo datur. Namq; velocitas aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX.) eſt in hac ipſa ratione.

Prop. XLI. Prob. XXVIII.

Poſita cujuſcunq; generis vi centripeta & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C & invenienda ſit Trajectoria $VITKk$. Detur circulus VXY centro C intervallo quovis CV deſcriptus, centroq; eodem deſcribantur alii quivis circuli ID, KE

KE trajectoriam ſecantes in *I* & *K* rectamq; *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* ſecantem circulos *KE*, *VY* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VXY* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* ſibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *T* & *K* ad *k*; ſitq; *A* altitudo illa de qua corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & ſtantibus quæ in Propoſitione XXXIX, quoniam lineola *IK*, dato tempore quam minimo deſcripta, eſt ut velocitas atq; adeo ut latus quadratum areæ *ABFD*, & triangulum *ICK*



tempori proportionale datur, adeoq; *KN* eſt reciproce ut altitudo *IC*, id eſt, ſi detur quantitas aliqua *Q*, & altitudo *IC* nominetur *A*, ut $\frac{Q}{A}$; quam nominemus *Z*. Ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius *Q* ut ſit $\sqrt{ABFD}$ in aliquo caſu ad *Z* ut eſt *IK* ad *KN*, & erit ſemper $\sqrt{ABFD}$ ad *Z* ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad *ZZ* ut *IK quad.* ad *KN quad.* & diviſim $ABFD - ZZ$ ad *ZZ* ut *IN quad.* ad *KN quad.* adeoq; $\sqrt{\overline{ABFD - ZZ}}$ ad *Z* ut *IN* ad *KN*, & propterea $A \times KN$ æquale

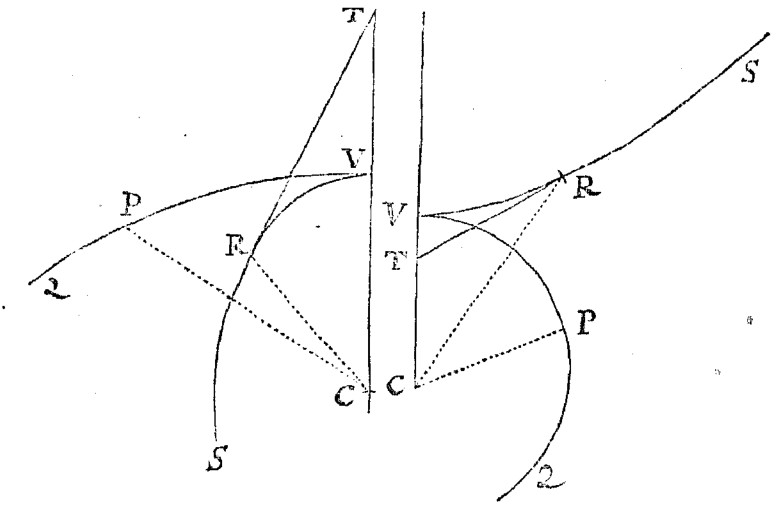
quale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $YX \times XC$ ſit ad $A \times KN$ in duplicata ratione YC ad KC, erit rectang. $YX \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX \textit{ quad.}}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX \textit{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpective, & deſcribantur curvæ lineæ ab, cd quas puncta b, c perpetuo tangunt; deq; puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Vad abſcindens areas curvilineas $VDba$, $VDdc$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu $DbzE$ æquale eſt dimidio rectanguli $A \times KN$, ſeu triangulo ICK; & rectangulum $Dc \times IN$ ſeu $Dc \times E$ æquale eſt dimidio rectanguli YX in CX, ſeu triangulo XCY; hoc eſt, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDcd$, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DExc$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, adeoq; tempori proportionalis, & area genita $VDdc$ æqualis Sectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, dabitur area ipſi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDcd$, eiq; æqualis Sector VCX una cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæq; corporum altitudines, id eſt Apſides Trajectoriarum expedite inveniri poſſunt. Incidunt enim Apſides in puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam VIK: id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, adeoq; ubi area $ABFD$ æqualis eſt ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo Trajectoria alibi ſecat lineam illam IC, ex data corporis altitudine IC expedite invenitur;

nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut KN ad IK, id eſt ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet Conica VRS, & a quovis ejus puncto R agatur Tangens RT occurrens axi infinite producto CV in puncto T; dein juncta CR ducatur recta CP, quæ æqualis ſit abſciſſæ CT, angulumq; VCP Sectori VCR proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo diſtantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V juſta cum velocitate ſecundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum P perpetuo tangit; adeoq; ſi conica ſectio $CVRS$ Hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea Ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, ſi corpus quacunq; cum velocitate exeat de loco V, & perinde ut inceperit vel oblique deſcendere ad centrum, vel ab eo oblique aſcendere, figura $CVRS$ vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt Trajectoria augendo vel minuendo angulum VCP in data aliqua ratione. Sed et vi centripeta in centrifugam verſa, aſcendet corpus oblique in Trajectoria VPQ quæ invenitur capiendo angulum VCP Sectori Elliptico $CVRC$ proportionalem, & longitudinem CP longitudini CT æqualem: ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex



Pro-

Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem ut satis facilem brevitatis gratia missam facio.

Prop. XLII. Prob. XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I secundum lineolam IT, ea cum velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco P cadendo acquirere posset in D: sitq; hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum urgetur in I, ut DR ad DF. Pergat autem corpus versus k; centroq; C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rectæ PD in e, & erigantur curvarum $ALMm$, $BFGg$, $abzv$ $dcxw$ ordinatim applicatæ em, eg, ev, ew. Ex dato rectangulo $PDRQ$, dataq; lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per constructionem Problematis XXVII. & ejus *Corol.* 1. Deinde ex dato angulo CIT datur proportio nascentium IK, KN, & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q, una cum curvis lineis $abzv$, $dcxw$: adeoq; completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel Ck, tum area $Dcwe$, eiq; æqualis Sector XCy, angulusq; XCy & locus k in quo corpus tunc versabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his Propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunq; quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undiq; eandem. Atq; hactenus motum corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

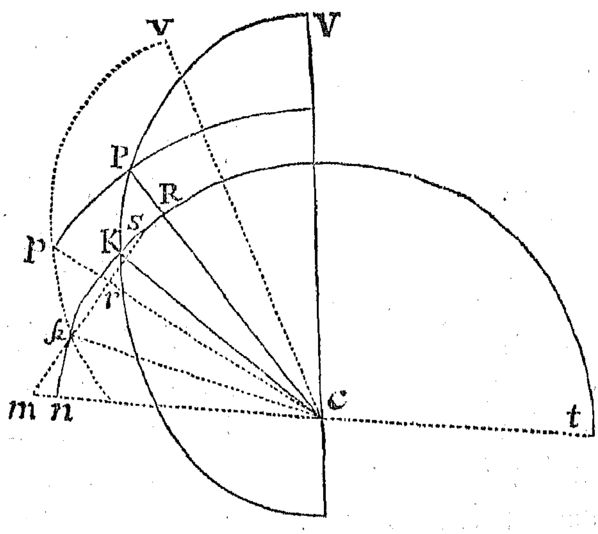
SECT. IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deq; motu Apsidum.

Prop. XLIII. Prob. XXX.

Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunq; circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atq; corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.

In Orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumq; *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & area quam linea *Cp* describit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* describit, ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoq; in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripeta, revolvi possit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus *VCv* angulo *PCp*, & linea *Cv* li-



neæ

neæ CV, atq; figura vCp figuræ VCP æqualis, & corpus in p ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis vCp, eodemq; tempore deſcribet arcum ejus vp quo corpus aliud P arcum ipſi ſimilem & æqualem VP in figura quieſcente VPK deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per Corollarium Propoſitionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi poſſit in curva illa linea quam punctum p deſcribit in plano immobili, & ſolvetur Problema. Q. E. F.

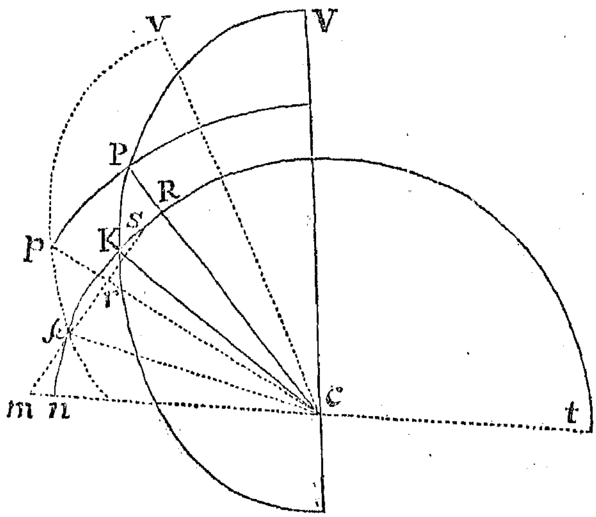
Prop. XLIV. Theor. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in Orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicata ratione communis altitudinis inverſe.

Partibus orbis quieſcentis VP, PK ſunto ſimiles & æquales orbis revolventis partes vp, pk. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculum kr, idemq; produc ad m, ut ſit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines PC & pC, KC & kC ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod ſi corporum in locis P & p exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per Legum Corol. 2.) in binos, (quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas PC, pC; alteri prioribus tranſverſi ſecundum lineas ipſis PC, pC perpendiculares determinantur) motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus corporis p erit ad motum tranſverſum corporis P, ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC, id eſt ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu ſuo utroq; pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a P verſus C, adeoq; completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea pC, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum acquirit a linea PC, ut eſt hujus motus tranſverſus ad motum

tranſ-

transversum alterius. Quare cum kr æqualis sit distantiæ quam corpus alterum acquirit a linea pC, sitq; mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P, manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita se habebunt ubi corpora P & p æqualiter secundum lineas pC & PC moventur, adeoq; æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut est angulus VCp ad angulum VCP, sitq; nC æqualis kC, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; adeoq; vi majore urgetur, si modo angulus mCp angulo kCp major est, id est si orbis Vpk movetur in consequentia, & minore, si orbis regreditur; estq; virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligatur circulus secans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoq; mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dentur magnitudine, sunt kr & mr, earumq; differentia mk & summa ms reciproce ut altitudo pC, adeoq; rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis pC. Est & mt directe ut $\frac{1}{2}mt$, id est ut altitudo pC. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id



est

eſt lineola naſcens mn, eiq; proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k eſt ad vim qua corpus motu circulari revolvi poſſet ab r ad k, eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut $Gq. - Fq.$ ad $Fq.$ Et propterea, ſi centro C intervallo quovis CP vel Cp deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit, differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area VPC, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut $Gq. - Fq.$ ad $Fq.$ Namq; ſector ille & area pCk ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

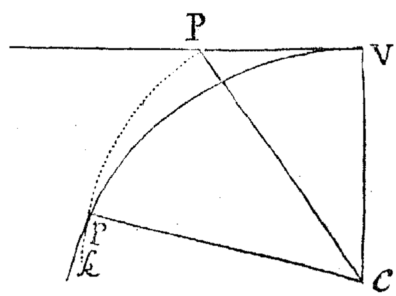
Corol. 2. Si orbis VPK Ellipſis ſit umbilicum habens C & Apſidem ſummam V; eiq; ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis vpk, ita ut ſit ſemper pc æqualis PC, & angulus VCp ſit ad angulum VCP in data ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pc ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur $2R$: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{Fq.}{Aq.}$, & vis in V erit $\frac{Fq.}{CV\,quad.}$. Vis autem qua corpus in circulo ad diſtantiam CV ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide V, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad circuli ſemidiametrum CV, adeoq; valet $\frac{RFq.}{CV\,cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut $Gq. - Fq.$

ad

riter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGq. - VRFq.}{A\,cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq; immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam CV positione datam erigatur perpendiculum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturq; PC, & ipsi æqualis agatur Cp, constituens angulum VCp, qui sit ad angulum VCP in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in Curva illa Vpk quam punctum p perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis Cp. Nam corpus P, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta VP. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis CP vel Cp reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam Vpk. Est autem hæc Curva Vpk eadem cum Curva illa VPQ in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.



Prop. XLV. Prob. XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipsi mobili, ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3. revolvens, describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima CV, A pro altitudine quavis alia CP vel Cp, & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum ejus C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæq; in Corollario 2. erat ut $\frac{Fq.}{Aq.} + \frac{RGq. - RFq.}{A\,cub.}$ id est ut $\frac{Fq.A + RGq. - RFq.}{A\,cub.}$, substituendo $T - X$ pro A, erit ut $\frac{RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X}{A\,cub.}$. Reducenda similiter est v' quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit $A\,cub.$ numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoq; ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T\,cub. - 3Tq.X + 3TXq. - X\,cub.}{A\,cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad $T\,cub.$ ut $-Fq.X$ ad $-3Tq.X + 3TXq. - X\,cub.$ sive ut $-Fq.$ ad $-3Tq. + 3TX - Xq.$ Jam cum Orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atq; X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt $RGq.$ ad $T\,cub.$ ut $-Fq.$ ad $-3Tq.$ seu $Gq.$ ad $Tq.$ ut $Fq.$ ad $3Tq.$ & vicissim G *quadrat.* ad F *quadrat.* ut T *quad.* ad $3T$ *quad.* id est, ut 1 ad 3; adeoq; G ad F, hoc est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atq; adeo in orbe immobili de quo agimus, ab Abside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id

adeo

adeo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam, ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum, & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunq; integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} Xq.T^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X$, fit $RGq. - RFq. + TFq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $RGq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1}$, seu $Gq.$ ad T^{n-1} ut $Fq.$ ad nT^{n-1}, & vicissim $Gq.$ ad $Fq.$ ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; adeoq; G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu cor-

 po-

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$, id eſt ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A\,cub.}$ ſeu (per eandem Methodum noſtram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m - mbXT^{m-1} + \frac{mm-m}{2} bX^2T^{m-2} + cT^n - ncXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} cX^2T^{n-2} \ \&c.}{A\ Cub.}$$

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-Fq.$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} XT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $Gq.$ ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut $Fq.$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim $Gq.$ ad $Fq.$ ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV ſeu T Arithmetice per unitatem, fit $Gq.$ ad $Fq.$ ut $b + c$ ad $mb + nc$, adeoq; ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter Apſidem ſummam & Apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus VCp inter eaſdem Apſides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\,cub.}$, angulus inter Apſides invenietur $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$ graduum. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus

ſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data Numeratoris hujus $RGq. - RFq. + TFq. - Fq. X$ ad partem non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoq; unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$, cujus Index eſt $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per Exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deq; Apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere, nunquam perveniet ad Apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſq; ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud de Apſide diſcedens vel minimum aſcendere, aſcendet in infinitum, neq; unquam perveniet ad Apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis in receſſu a centro decreſcit in majori quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſq; vel aſcendet in infinitum. At ſi vis in receſſu a centro vel decreſcat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunq; Corpus nunquam deſcendet ad centrum uſq; ſed ad Apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de Apſide ad Apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum, Vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in mino-

minore quam triplicata altitudinis ratione decrefcet: & quo citius corpus de Apfide ad Apfidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut fi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apfide fumma ad Apfidem fummam alterno defcenfu & afcenfu redierit, hoc eft, fi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoq; $\frac{nn}{mm} - 3$ ualeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$, erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id eft reciproce ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$ vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus fingulis revolutionibus redierit ad Apfidem eandem immotam, erit m ad n ut 1 ad 1, adeoq; $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} feu $\frac{1}{A^2}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonftratum eft. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apfidem eandem redierit, erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoq; $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$ vel $A^{9 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$, & propterea Vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Deniq; fi Corpus pergendo ab Apfide fumma ad Apfidem fummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoq; Apfis illa fingulis corporis revolutionibus confecerit in Confequentia gradus tres, erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* adeoq; $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ erit æquale $A^{-\frac{265707}{131769}}$, & propterea Vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{265707}{131769}}$ feu $A^{2\frac{4}{243}}$. Decrefcit igitur Vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, fed quæ vicibus $60\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam fi corpus, vi centripeta quæ fit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipfi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel aufeferatur vis alia quævis extranea; cognofci poteft (per Exempla ter-

tertia) motus Apſidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut ſi vis qua corpus revolvitur in Ellipſi ſit ut $\frac{1}{A^2}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoq; vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A^3}$; erit (in Exemplis tertiis) A æqualis 1 & n æqualis 4, adeoq; angulus revolutionis inter Apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam eſſe $357,^{45}$ vicibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$ ſeu $180,^{7602}$, id eſt 180*gr.* 45*m.* 37*ſ.* Igitur corpus de Apſide ſumma diſcedens, motu angulari 180*gr.* 45*m.* 37*ſ.* perveniet ad Apſidem imam, & hoc motu duplicato ad Apſidem ſummam redibit: adeoq; Apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1*gr.* 31*m.* 14*ſ.*

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunq; datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunq; centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæq; tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SEC.

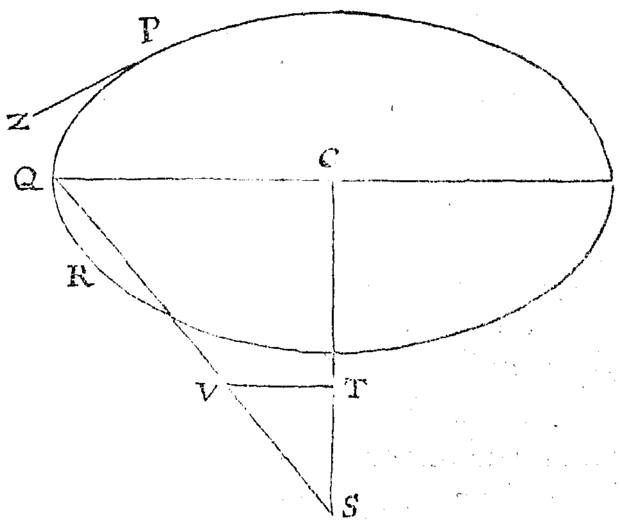
SECT. X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deq; Funipendulorum Motu reciproco.

Prop. XLVI. Prob. XXXII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta, datoq; tum virium centro tum plano quocunq; in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum Rectam in Plano illo datam egressi.

Sit S centrum virium, *SC* distantia minima centri hujus a plano dato, *P* corpus de loco *P* secundum rectam *PZ* egrediens, *Q* corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & *PQR* Trajectoria illa in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur *CQ QS*, & si in *QS* capiatur *SV* proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum *S*, & agatur *VT* quæ sit parallela *CQ* & occurrat *SC* in *T*: Vis *SV* resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires *ST*, *TV*; quarum *ST* trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera *TV*, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum *C* in plano

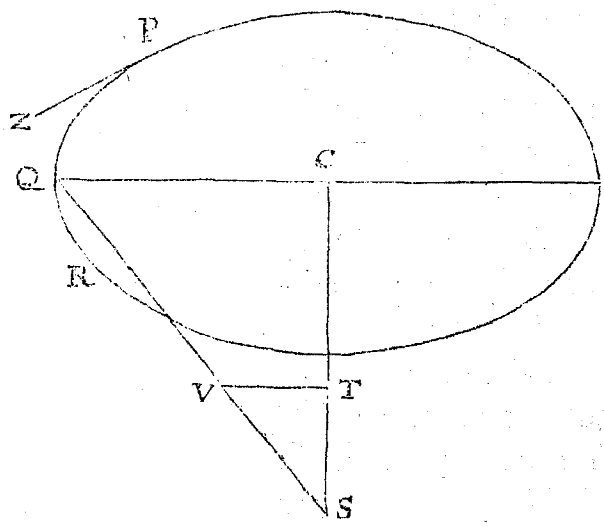


datum, adeoq; facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis *ST* tolleretur, & corpus vi sola *TV* revolveretur circa centrum *C* in spatio libero. Data autem vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in spatio libero circa centrum datum *C* revolvitur, datur per Prop. XLII. tum Trajectoria *PQR* quam corpus describit, tum locus *Q* in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum deniq; velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. Q. E. I.

Prop. XLVII. Theor. XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunq; revolventia describent Ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæq; moventur in lineis rectis ultro citroq; discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam stantibus quæ in superiore Propositione; vis *SV* qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur versus centrum *S* est ut distantia *SQ*; atq; adeo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV* qua corpus trahitur versus punctum *C* in Orbis plano datum, est ut distantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* versantia trahuntur versus punctum *C*, sunt pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaq; trahuntur versus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus in iisdem figuris in plano



quo-

quovis *PQR* circa punctum *C*, atq; in ſpatiis liberis circa centrum *S*, adeoq; (per Corol. 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.)temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroq; in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circa axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendendo currant ultro citroq; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atq; adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

Prop. XLVIII. Theor. XVI.

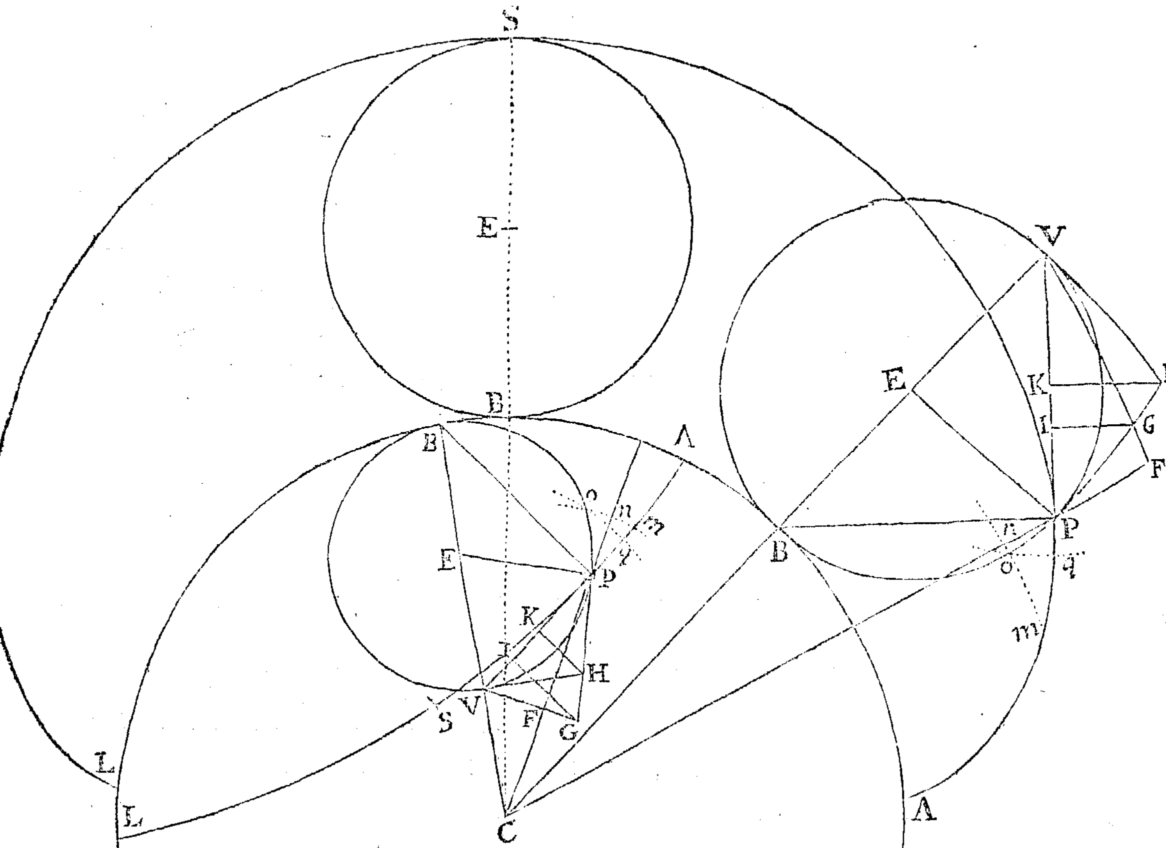
Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

Prop. XLIX. Theor. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod

quod punctum quodvis in Rotæ Perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei insistens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo



ABL ab *A* per *B* versus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* sibi invicem semper æquentur, atq; punctum illud *P* in Perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea descripta ex quo Rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ *PB*, ut 2 *CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (si

opus

opus eſt producta) occurrat Rotæ in V, junganturq; CP, BP, EP, VP, & in CP productam demittatur Normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & V concurrentes in H, ſecetq; PH ipſam VF in G, & ad VP demittantur Normales GI, HK. Centro item C & intervallo quovis deſcribatur circulus nom ſecans rectam CP in n, Rotæ perimetrum Bp in o & viam curvilineam AP in m, centroq; V & intervallo Vo deſcribatur circulus ſecans VP productam in q.

Quoniam Rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus B, manifeſtum eſt quod recta BP perpendicularis eſt ad lineam illam curvam AP, quam Rotæ punctum P deſcribit, atq; adeo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P. Circuli nom radius ſenſim auctus æquetur tandem diſtantiæ CP, & ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis $Pnomq$ & figuræ $PFGVI$, ratio ultima lineolarum evaneſcentium Pm, Pn, Po, Pq, id eſt ratio incrementorum momentaneorum curvæ AP, rectæ CP & arcus circularis BP, ac decrementi rectæ VP, eadem erit quæ linearum PV, PF, PG, PI reſpective. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares ſunt, anguliq; HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHP, (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos,) complet angulum VEP ad duos rectos, adeoq; angulo CEP æqualis eſt, ſimilia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV ſeu HP, & ita KI ad KP, & diviſim ut CB ad CE ita PI ad PK, & duplicatis conſequentibus ut CB ad $2CE$ ita PI ad PV. Eſt igitur decrementum lineæ VP, id eſt incrementum lineæ $BV-VP$, ad incrementum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad $2CE$, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines $BV-VP$ & AP incrementis illis genitæ ſunt in eadem ratione. Sed exiſtente BV radio, eſt VP coſinus anguli VPB ſeu $\frac{1}{2}BEP$, adeoq; $BV-VP$ ſinus verſus ejuſdem anguli, & propterea in hac Rota cujus radius eſt $\frac{1}{2}BV$, erit $BV-VP$ duplus ſinus verſus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo AP eſt ad duplum ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad CB. Q. E. D.

Lineam autem *AP* in Propoſitione priore Cycloidem extra Globum, alteram in poſteriore Cycloidem intra Globum diſtinctionis gratia nominabimus

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur Cyclois integra *ASL* & biſecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus eſt ſinus anguli *VBP*, exiſtente *EB* radio) ut 2 *CE* ad *CB*, atq; adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri Cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad Rotæ diametrum *BV* ut 2 *CE* ad *CB*.

Corol. 3. Ideoq; longitudo illa eſt ut rectangulum *BEC*, ſi modo Globi detur ſemidiameter.

Prop. L. Prob. XXXIII.

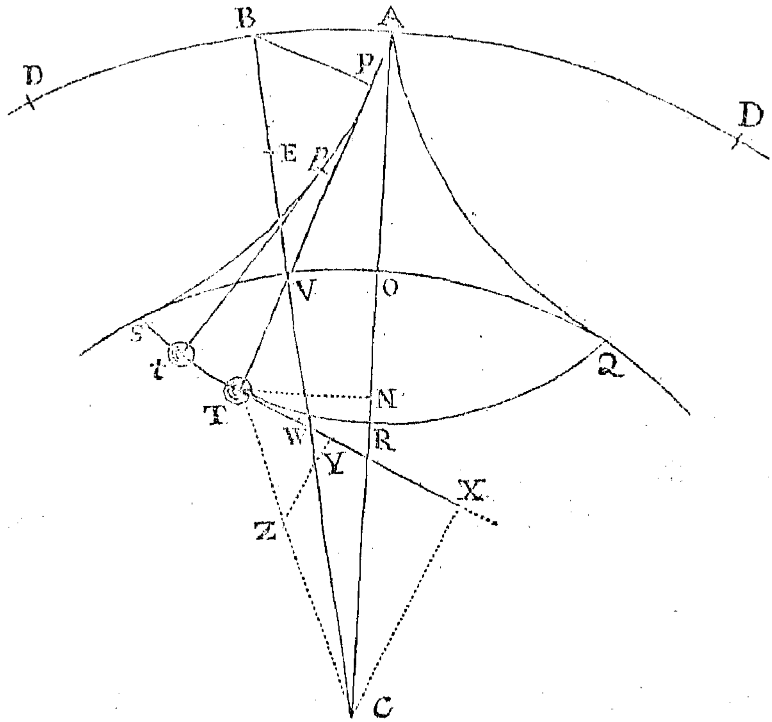
Facere ut Corpus pendulum oſcilletur in Cycloide data.

Intra Globum *QVS* centro *C* deſcriptum detur Cyclois *QRS* biſecta in *R* & punctis ſuis extremis *Q* & *S* ſuperficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* biſecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut ſit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo *CA* deſcribatur Globus exterior *ABD*, & intra hunc globum Rota, cujus diameter ſit *AO*, deſcribantur duæ ſemicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra ſemicycloides *AQ*, *AS* oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte ſui ſuperiore *AP* applicetur ad ſemicycloidem illam *APS*, verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteq; reliqua *PT* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oſcillabitur in Cycloide data *QRS*. Q. E. F.

Occurrat enim filum *PT* tum Cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in V, agaturq; *CV* occurrens circulo *ABD* in *B*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P*. ac T, erigantur

per-

perpendicula PB, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet enim ex genesi Cycloidis, quod perpendicula illa PB, TW abscindent de CV longitudines VB, VW rotarum diametris OA, OR æquales, atq; adeo quod punctum B incidet in circulum ABD. Est igitur TP ad VP (duplum sinum anguli VBP existente $\frac{1}{2}BV$ radio) ut BW ad BV, seu $AO+OR$ ad AO, id est (cum sint CA ad CO, CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales,) ut $CA+CO$ seu $2CE$ ad CA. Proinde per Corol. 1. Prop. XLIX. longitudo PT æquatur Cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur Cycloidis arcui dimidio APS, hoc est (per Corollar. 2. Prop. XLIX longitudini AR. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide QRS. Q. E. D.



Corol. Filum AR æquatur Cycloidis arcui dimidio APS.

Prop. LI. Theor. XVIII.

Si vis centripeta tendens undiq; ad Globi centrum C sit in locis singulis ut distantia loci cujusq; a centro, & hac sola vi agente Corpus T oscil-

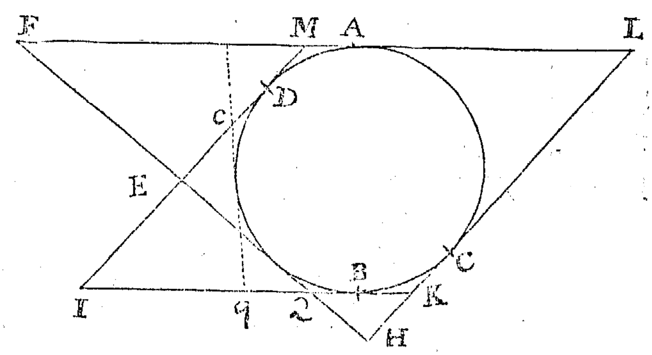
Nam si diametri conjugatæ AB, DM tangenti FG occurrant in E & H, seq; mutuo secent in C, & compleatur parallelogrammum IKCL; erit ex natura sectionum Conicarum, ut EC ad CA ita CA ad LC, & ita divisim EC − CA ad CA − CL seu EA ad AL, & composite EA ad EA + AL seu EL ut EC ad EC + CA seu EB; adeoq; (ob similitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG) AF ad LI ut CH ad BG. Est itidem ex natura sectionum Conicarum LI seu CK ad CD ut CD ad CH, atq; adeo ex æquo perturbate AF ad CD ut CD ad BG. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis AF, BG occurrant in F & G, P & Q, seq; mutuo secent in O, erit (ex æquo perturbate) AF ad BQ ut AP ad BG, & divisim ut FP ad GQ, atq; adeo ut FO ad OG.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ PG, FQ per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum A, B transeuntem.

Lemma XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunq; Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa unius lateris sit ad latus illud, ut pars lateris contermini inter punctum contactus & latus tertium, ad abscissam lateris hujus contermini.



Tangant parallelogrammi MIKL latera quatuor ML, IK *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis QRS: dico quod oscillationum utcunq; inæqualium æqualia erunt Tempora*

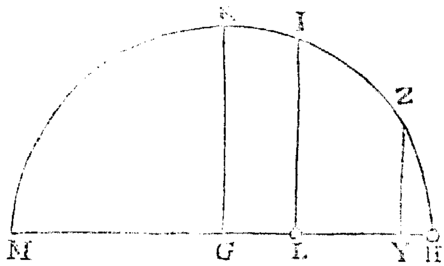
Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta qua corpus T impellitur versus C est ut distantia CT, (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes CX, TX, quarum CX impellendo corpus directe a P distendit filum PT & per cujus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX urgendo corpus transversim seu versus X, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio huic vi acceleratrici proportionalis sit singulis momentis ut longitudo TX, id est, ob datas CV, WV iisq; proportionales TX, TW, ut longitudo TW, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, Apt de perpendiculo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR, tR. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atq; adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesq; describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum AR. Cumq; vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo R, per eosdem arcus Trochoidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atq; adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea cum Cycloidis partes duæ RS & RQ ad utrumq; perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. Q. E. D.

Prop.

Prop. LII. Prob. XXXIV.

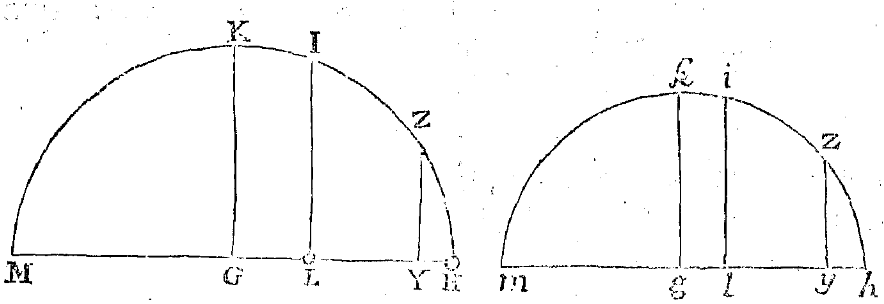
Definire & velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, describe semicirculum *HKMG* semidiametro *GK* bisectum. Et si vis centripeta distantiis locorum a centro proportionalis tendat ad centrum *G*, sitq; ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* (*Vide Fig. Prop.* L. & LI.) ad ipsius centrum tendente; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco supremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis *TR*, *GL* semper proportionales, atq; adeo, si æquantur *TR* et ~~ad~~ *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa describere spatia *ST*, *HL* æqualia sub initio, adeoq; subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. XXXVIII., tempus quo corpus describit arcum *ST* est ad tempus oscillationis unius, ut arcus *HI* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*) ad semicirculum *HKM* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*.) Et velocitas corporis penduli in loco *T* est ad velocitatem ipsius in loco infimo *R*, (hoc est velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, seu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, sive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad *SR*. Unde cum in Oscillationibus inæqualibus describantur æqualibus temporibus arcus totis Oscillationum arcubus proportionales, habentur ex datis



temporibus & velocitates & arcus descripti in Oscillationibus universis. Quæ erant primo invenienda.

Oscillentur jam funipendula duo corpora in Cycloidibus inæqualibus & earum semiarcubus æquales capiantur rectæ *GH*, *gh*, centrisq; *G*, *g* & intervallis *GH*, *gh* describantur semicirculi *HZKM*, *hzkm*. In eorum diametris *HM*, *hm* capiantur lineolæ æquales *HY*, *hy*, & erigantur normaliter *YZ*, *yz* circumferentiis occurrentes in *Z* & *z*. Quoniam corpora pendula sub initio motus versantur in circumferentia globi *QOS*, adeoq; a viribus æqualibus urgentur in centrum, incipiuntq; directe versus centrum moveri, spatia simul confecta æqualia erunt sub initio. Urgeantur igitur corpora *H*, *h* a viribus iisdem in *H* & *h*, sintq;



HY, *hy* spatia æqualia ipso motus initio descripta, & arcus *HZ*, *hz* denotabunt æqualia tempora. Horum arcuum nascentium ratio prima duplicata est eadem quæ rectangulorum *GHY*, *ghy*, id est, eadem quæ linearum *GH*, *gh*; adeoq; arcus capti in dimidiata ratione semidiametrorum denotant æqualia tempora. Est ergo tempus totum in circulo *HKM*, Oscillationi in una Cycloide respondens, ad tempus totum in circulo *hkm* Oscillationi in altera Cycloide respondens, ut semiperiferia *HKM* ad medium proportionale inter hanc semiperiferiam & semiperiferiam circuli alterius *hkm*, id est in dimidiata ratione diametri *HM* ad diametrum *hm*, hoc est in dimidiata ratione perimetri Cycloidis primæ ad perimetrum Cycloidis alterius, adeoq; tempus illud in Cyclocloide quavis eſt (per Corol. 3. Prop. XLIX.) ut latus quadratum rectanguli *BEC* contenti ſub ſemidiametro Rotæ, qua Cyclois deſcripta fuit, & differentia inter ſemidiametrum illam & ſemidiametrum globi. Q. E. I. Eſt & idem tempus (per Corol. Prop. L.) in dimidiata ratione longitudinis fili *AR*. Q. E. I.

Porro ſi in globis concentricis deſcribantur ſimiles Cycloides: quoniam earum perimetri ſunt ut ſemidiametri globorum & vires in analogis perimetrorum locis ſunt ut diſtantiæ locorum a communi globorum centro, hoc eſt ut globorum ſemidiametri, atq; adeo ut Cycloidum perimetri & perimetrorum partes ſimiles, æqualia erunt tempora quibus perimetrorum partes ſimiles Oſcillationibus ſimilibus deſcribuntur, & propterea Oſcillationes omnes erunt Iſochronæ. Cum igitur Oſcillationum tempora in Globo dato ſint in dimidiata ratione longitudinis *AR*, atq; adeo (ob datam *AC*)in dimidiata ratione numeri $\frac{AR}{AC}$, id eſt in ratione integra numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$; & hic numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ ſervata ratione *AR* ad *AC* (ut fit in Cycloidibus ſimilibus) idem ſemper maneat, & propterea in globis diverſis, ubi Cycloides ſunt ſimiles, ſit ut tempus: manifeſtum eſt quod Oſcillationum tempora in alio quovis globo dato, atq; adeo in globis omnibus concentricis ſunt ut numerus $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$, id eſt, in ratione compoſita ex dimidiata ratione longitudinis fili *AR* directe & dimidiata ratione ſemidiametri globi *AC* inverſe. Q. E. I.

Deniq; ſi vires abſolutæ diverſorum globorum ponantur inæquales, accelerationes temporibus æqualibus factæ, erunt ut vires. Unde ſi tempora capiantur in dimidiata ratione virium inverſe, velocitates erunt in eadem dimidiata ratione directe, & propterea ſpatia erunt æqualia quæ his temporibus deſcribuntur. Ergo Oſcillationes in globis & Cycloidibus omnibus, quibuſcunq; cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex dimidiata ratione longitudinis Penduli directe, & dimidiata ratione distantiæ inter centrum Penduli & centrum globi inverse, & dimidiata ratione vis absolutæ etiam inverse, id est, si vis illa dicatur V, in ratione numeri $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Trochoide quavis APS ut $\frac{1}{2}BC$ ad $\sqrt{BEC}$.

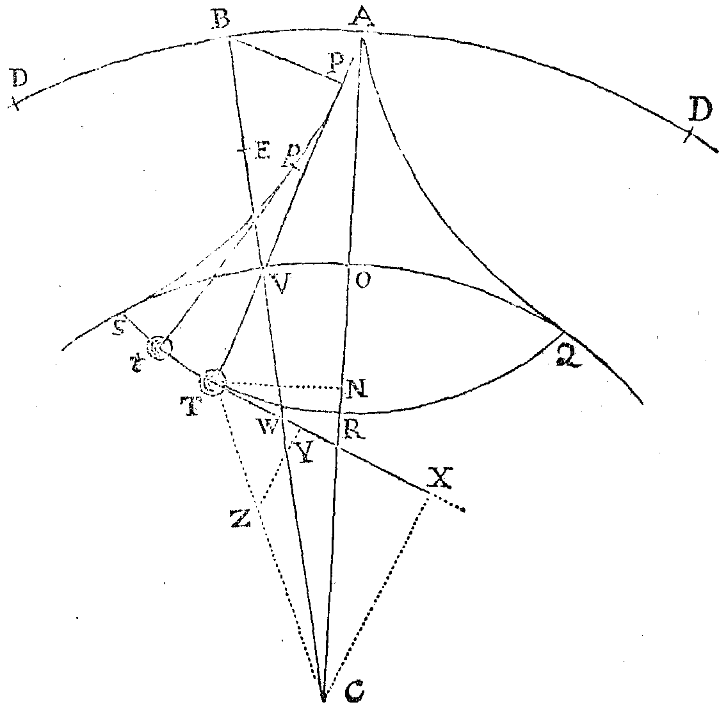
Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *D. C. Wrennus* & *D. C. Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies Sphærica in planum, visq; centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu, longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *D. C. Wrennus*: Et pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus intra

intra globos Oſcillari debent, ut Oſcillationes omnes evadant Iſochronæ. Nam gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie Terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

Prop. LIII. Prob. XXXV.

Conceſſis figurarum curvilinearum Quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis Oſcillationes ſemper Iſochronas peragent.



Oſcilletur corpus T in curva quavis linea $STRQ$, cujus axis ſit OR tranſiens per virium centrum C. Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inq; hac Tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcus illius ex figurarum Quadraturis per Methodos vulgares innoteſcit. De puncto Y educatur recta YZ Tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. Q. E. I.

Nam ſi vis, qua corpus trahitur de T verſus C, exponatur per rectam TZ captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires

TY,

TY, *YZ*; quarum *YZ* trahendo corpus ſecundum longitudinem fili *PT*, motum ejus nil mutat, vis autem altera T *Y* motum ejus in curva *STRQ* directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc ſit ut via deſcribenda *TR*, accelerationes corporis vel retardationes in Oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus *T* filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, deſcribat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum a vi aliqua, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus ſinum *TN*: æqualia erunt Oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, ſimilia erunt triangula *ANT*, *TYZ*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut T *Y* ad T *N*; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *A*T, vis T Z, qua Oſcillationes evadent Iſochronæ, erit ad vim gravitatis *A*T, ut arcus T *R* ipſi T *Y* æqualis ad arcus illius ſinum T *N*.

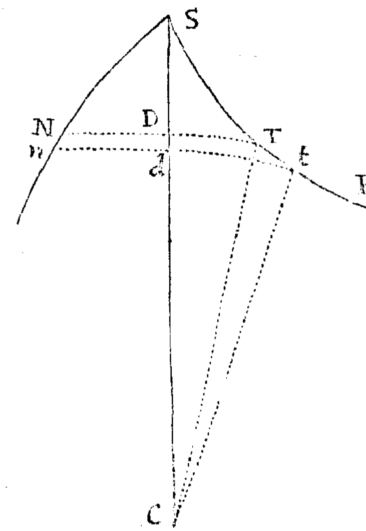
Corol. 2. Igitur in Horologiis, ſi vires a Machina in Pendulum ad motum conſervandum impreſſæ ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu T *R* & radio *AR*, ad ſinum T *N*, Oſcillationes omnes erunt Iſochronæ.

Prop. LIV. Prob. XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuſcunq; curvis in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat enim corpus de loco quovis *S* per lineam quamvis curvam *S*T*tR* in plano per virium centrum *C* tranſeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſit-

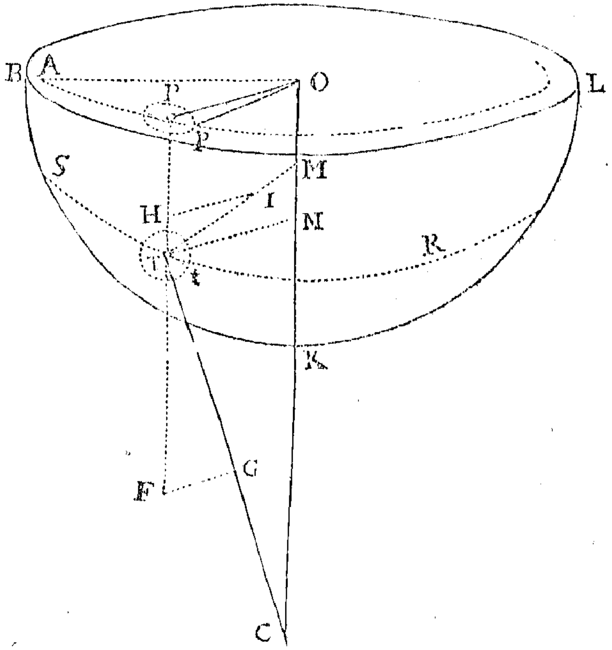
ſitq; *D d* partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *C D*, *C d* deſcribantur circuli *D T*, *d t*, Lineæ curvæ *S T t R* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *C S* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *C T*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam *T t*, eſt ut lineolæ hujus longitudo (id eſt ut ſecans anguli *t T C*) directe, & velocitas inverſe. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata *D N* ad rectam *C S* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *D d* erit rectangulum *D d* x *D N*, hoc eſt area *D N n d*, eidem tempori proportionale. Ergo ſi *S N n* ſit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area *S N D S* proportionalis tempori quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam *S T*; proindeq; ex inventa illa area dabitur tempus. Q. E. I.



Prop. LV. Theor. XIX.

Si corpus movetur in ſuperficie quacunq; curva, cujus axis per centrum virium tranſit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eiq; parallela & æqualis ab axis puncto quovis ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit *B S K L* ſuperficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *S T t R* Trajectoria quam corpus in eadem deſcribit, *S* initium Trajectoriæ, *O M N K* axis ſuperficiei curvæ, *T N* recta a corpore in axem perpendicularis, *O P* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *A P* veſtigium Trajectoriæ a puncto *P* in in lineæ volubilis OP plano AOP deſcriptum, A veſtigii initium puncto S reſpondens, TC recta a corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum C proportionalis; TM recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; TI pars ejus vi preſſionis qua corpus urget ſuperficiem, viciſſimq; urgetur verſus M a ſuperficie, proportionalis; $PHTF$ recta axi parallela per corpus tranſiens, & GF, IH rectæ a punctis G & I in parallelam illam $PHTF$ perpendiculariter demiſſæ. Dico jam quod area AOP, radio OP ab initio motus deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis TG (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in vires TF, FG; & vis TI in vires TH, HI: Vires autem TF, TH agendo ſecundum lineam PF plano AOP perpendicularem mutant ſolummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoq; motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus, hoc eſt motus puncti P, quo Trajectoriæ veſtigium AP in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires TF, TH tollerentur, & corpus ſolis viribus FG, HI agitaretur, hoc eſt idem ac ſi corpus in plano AOP vi centripeta ad centrum O tendente & ſummam virium FG & HI æquante, deſcriberet curvam AP. Sed vi tali deſcribetur area AOP (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. E. D.



Corol. Eodem argumento ſi corpus a viribus agitatum ad centra duo

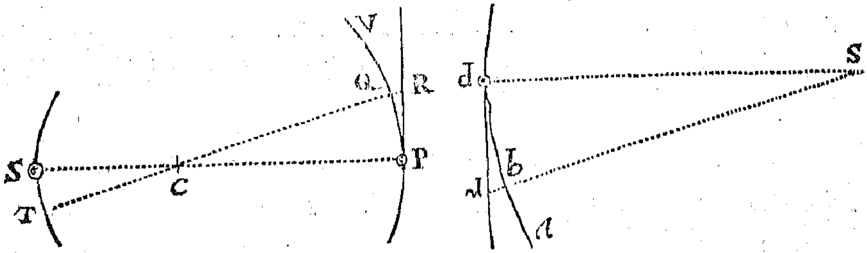
duo vel plura in eadem quavis recta CO data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunq; curvam ST, foret area AOP tempori semper proportionalis.

Prop. LVI. Prob. XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, datisq; tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum velocitate versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam $STtR$, & ex data ejus velocitate in altitudine SC dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine TC. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam Tt, sitq; Pp vestigium ejus plano AOP descriptum. Jungatur Op, & circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti sit PpQ vestigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ descriptum. Et ob datum magnitudine & positione circellum, dabitur Ellipsis illa PpQ. Cumq; area POp sit tempori proportionalis, atq; adeo ex dato tempore detur, dabitur Op positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio p, una cum angulo OPp, in quo Trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP. Inde autem invenietur Trajectoriæ vestigium illud APp, eadem methodo qua curva linea $VIKk$ in Propositione XLI. ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigii punctis P erigendo ad planum AOP perpendicula PT superficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur singula Trajectoriæ puncta T. Q. E. I.

rollarium quartum, vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quieſcit, inq; s & p locentur corpora duo, immobile in s, mobile in p, corporibus S & P ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr curvas PQ & pq in P & p, & producantur CQ & sq ad R & r. Et ob ſimilitudinem figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit RQ ad rq ut CP ad sp, adeoq; in data ratione. Proinde ſi vis qua Corpus P verſus Corpus S, atq; adeo verſus centrum intermedium C attrahitur, eſſet ad vim qua corpus p verſus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus PR, pr ad arcus PQ, pq, per intervalla ipſis pro-



portionalia RQ, rq; adeoq; vis poſterior efficeret ut corpus p gyraretur in curva pqv, quæ ſimilis eſſet curvæ PQV, in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione CP ad sp, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum S & s, P & p, & æqualitatem diſtantiarum SP, sp) ſibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de Tangentibus; & propterea ut corpus poſterius p trahatur per intervallum majus rq, requiritur tempus majus, idq; in dimidiata ratione intervallorum; propterea quod, per Lemma decimum, ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p eſſe ad velocitatem corporis P in dimidiata ratione diſtantiæ sp ad diſtantiam CP, eo ut temporibus quæ ſint in eadem dimidiata ratione de-

ſcri-

ſcribantur arcus PQ, pq, qui ſunt in ratione integra: Et corpora P, p viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia C & s figuras ſimiles PQV, pqv, quarum poſterior pqv ſimilis eſt & æqualis figuræ quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium ſextum, motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, adeoq; corpora deſcribent circum ſe mutuo figuras eaſdem ac prius, & propterea figuræ pqv ſimiles & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Ellipſes concentricas: & vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, ſunt vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus deſcribunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum & circum ſe mutuo ſectiones conicas umbilicos habentes in centro circum quod figuræ deſcribuntur. Et vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuo ductis, deſcribunt areas temporibus proportionales.

Prop. LIX. Theor. XXII.

Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolventium tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis & figuris quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in dimidiata ratione corporis alterius S, ad ſummam corporum $S+P$.

Namq;

Namq; ex demonſtratione ſuperioris Propoſitionis, tempora quibus arcus quivis ſimiles PQ & pq deſcribuntur, ſunt in dimidiata ratione diſtantiarum CP & SP vel sp, hoc eſt, in dimidiata ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles PQ & pq deſcribuntur, hoc eſt tempora tota quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem dimidiata ratione. Q. E. D.

Prop. LX. Theor. XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahentia, revoluntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipſeos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S deſcribit, Axis tranſverſus erit ad axem tranſverſum Ellipſeos, quam corpus idem P circa alterum quieſcens S eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum S+P ad primam duarum medie proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum S.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica, per Theorema ſuperius, forent in dimidiata ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia, Ellipſeos autem axis tranſverſus per Theorema VII. minuetur in ratione cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ eſt triplicata; adeoq; ad axem tranſverſum Ellipſeos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverſe, axis tranſverſus Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem tranſverſum deſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXI. Theor. XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neq; alias agitata vel impedita, quomodocunq; moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumq; a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atq; respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium, adeoq; eædem sunt ac si a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam data est ratio distantiæ corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis ejusdem a corpore altero, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitatibus datis utcunq; derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia & quantitatibus totidem datis datamq; illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel deniq; ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitatibus datis quomodocunq; derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel deniq; ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitatibus datis similiter derivata. Hoc est Vis trahentis eadem erit Lex respectu distantiæ utriusq;. Q. E. D.

Prop. LXII. Prob. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, per Theorema noviſſimum, perinde movebuntur, ac ſi a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet (per Hypotheſin) & propterea (per Legum Corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus Corporum (per Probl. XXV.) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. Q. E. I.

Prop. LXIII. Prob. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deq; locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per Legum Corollarium quintum & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili de loco dato, ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille Syſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium

motus

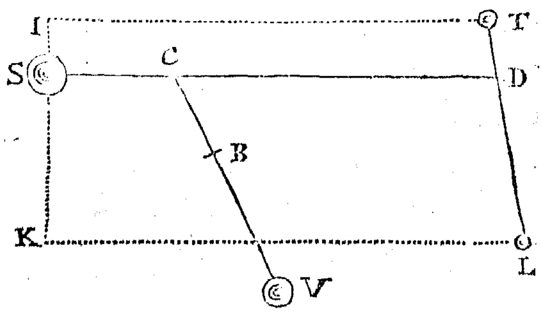
motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. Q. E. I.

Prop. LXIV. Prob. XL.

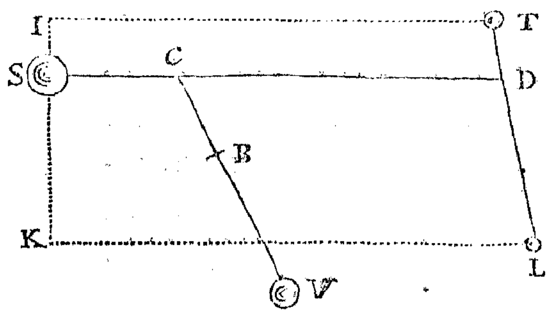
Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur motus plurium Corporum inter ſe.

Ponantur imprimis corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Deſcribent hæc per Corollarium primum Theorematis XXI. Ellipſes centra habentes in D, quarum magnitudo ex Problemate V. innoteſcit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST, SL, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis ST per Legum Corol. 2. reſolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires autem DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL, atq; adeo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis DT ac DL proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; adeoq; (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 7. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas TI, LK ipſi DS parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ipſa æqualiter accedere ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam IK acceſſus



faciendo ut Syſtema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S (eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, trahitur verſus centrum C) deſcribit Ellipſin circa idem C; & punctum D ob proportionales CS, CD deſcribet Ellipſin conſimilem, e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, poſterius poſteriore) æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum eſt) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D Ellipſes ſuas deſcribendo, ut prius. Q. E. I.



Addatur jam corpus quartum V, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis B deſcribere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, ſed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita ſe habent ubi corpora T & L trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. Q. E. I.

Prop. LXV. Theor. XXV.

Corpora plura quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum

rum ab eorundem centris, moveri posse inter se in Ellipsibus, & radiis ad umbilicos ductis Areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus, neq; fieri potest ut corpora secundum legem hic positam se mutuo trahentia moveantur in Ellipsibus accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantq; ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum.) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro; & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absq; errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsibus, atq; radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usq; donec error iste & actiones mutuæ sint datis quibusvis minores, atq; adeo donec orbes cum Ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, absq; errore qui non sit minor quovis dato. Q. E. O.

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Systetema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum, & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum minores ſint differentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem quam datæ quævis, perſeverabunt motus partium Syſtematis inter ſe abſq; erroribus qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, Syſtema totum ad modum corporis unius attrahitur, movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum, Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipſim fortiore,) & Radio ad maximum ducto, ~~verret~~ describet areas temporibus proportionales, abſq; ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ (perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Syſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Syſtematis inter ſe, propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorq; proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Syſtematis verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quam inæqualitas proportionis diſtantiarum a corpore maximo: Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundum lineas

pa-

parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorq; ſit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi Syſtematis hujus partes in Ellipſibus vel Circulis ſine perturbatione inſigni moveantur, manifeſtum eſt, quod eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter & ſecundum lineas parallelas quamproxime.

Prop. LXVI. Theor. XXVI.

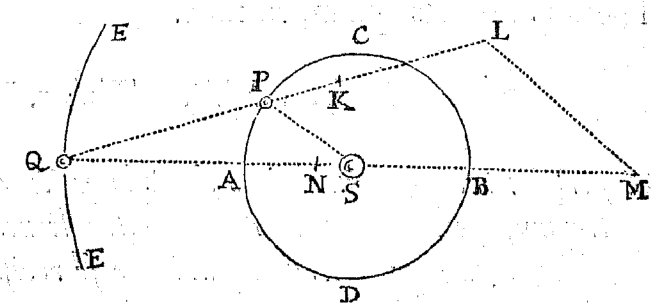
Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum in plano communi revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & Q in eodem plano circa maximum S, quorum P deſcribat orbem interiorem PAB, & Q exteriorem QE. Sit QK mediocris diſtantia corporum P & Q; & corporis P verſus Q attractio acceleratrix in mediocri illa diſtantia exponatur per eandem. In duplicata ratione QK

ad

ad QP capiatur QL ad QK, & erit QL attractio acceleratrix corporis P versus Q in distantia quavis QP. Junge PS, eiq; parallelam age LM occurrentem QS in M, & attractio QL resolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones QM, LM. Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici: una tendente ad S & oriunda a mutua attractione corporum S & P. Hac vi sola corpus P, circum corpus S sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PS temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis S. Patet hoc per Prob. VI. & Corollaria Theor. XXI. Vis altera est attractionis LM, quæ quoniam tendit a P ad S, superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. XXI.



At quoniam non est quadrato distantiæ PS reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idq; eo magis quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII. & Corol. 2. Theor XXI.) vis qua Ellipsis circa umbilicum S describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ PS reciproce proportionalis; vis illa composita aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis PAB aberret a forma Ellipseos umbilicum habentis in S; idq; eo magis quo major est aberratio ab hac proportione; atq; adeo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia QM, trahendo corpus P secundum lineam ipsi QS [illegible], componet cum viribus prioribus vim quæ non ar[illegible] in S, quaq; ab hac determinatione tanto ma-

magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atq; adeo quæ faciet ut corpus P, radio SP, areas non amplius temporibus proportionales describet, atq; aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigitur a P ad S, tum etiam quod non sit proportionalis quadrato distantiæ PS. Quibus intellectis, manifestum est quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis PAB tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis S attractio acceleratrix versus Q per lineam QN; & si attractiones acceleratrices QM, QN æquales essent, hæ trahendo corpora S & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio QN minor esset attractione QM, tolleret ipsa attractionis QM partem QN, & maneret pars sola MN, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio QN major esset attractione QM, oriretur ex differentia sola MN perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem QN reducitur semper attractio tertia superior QM ad attractionem MN, attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita PAB ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est ubi corporum P & S attractiones acceleratrices, factæ versus corpus Q, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est ubi attractio QN non est nulla, neq; minor minima attractionum omnium QM, sed inter attractionum omni-

ni-

nium QM maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neq; multo minor attractione QK. Q. E. D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P, Q circa maximum S in planis diversis, & vis LM, agendo secundum lineam PS in plano Orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neq; corpus P de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM, agendo secundum lineam quæ ipsi QS parallela est, (atq; adeo, quando corpus Q versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB;) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio in dato quovis corporum P & S ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN, adeoq; minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio QN non est multo major neq; multo minor attractione QK. Q. E. D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod si corpora plura minora P, Q, R &c. revolvantur circa maximum S: motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum S pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atq; cæteri a se mutuo.

Corol. 2. In Systemate vero trium corporum S, P, Q; si attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum, corpus P radio PS aream circa corpus S velocius describet prope conjunctionem A & oppositionem B, quam prope quadraturas C, D. Namq; vis omnis qua corpus P urgetur & corpus S non urgetur, quæq; non agit secundum lineam PS, accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in antecedentia vel in consequentia dirigitur. Talis est vis NM. Hæc in transitu corporis P a C ad A tendit in antecedentia, motumq; accelerat; dein usq; ad D in consequentia, & motum retardat; tum in antecedentia usq; ad B, & ultimo in conseqentia transeundo a B ad C.

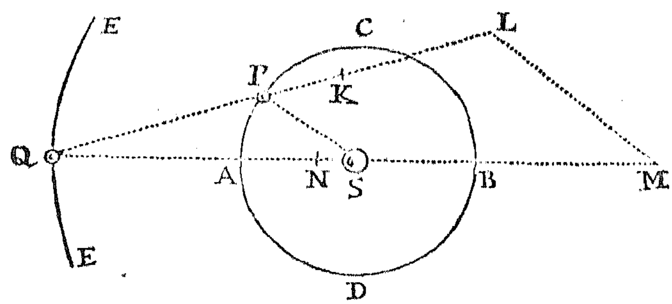
Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P, cæteris

par-

paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P* cæteris paribus curvior est in quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *S* trahit corpus *P*, adeoq; vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *S*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *S* in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit, Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi Apsides sunt in Syzygiis; indeq; fieri potest ut corpus *P*, ad Apsidem summam appellans, absit longius a corpore *S* in Syzygiis quam in Quadraturis.



Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *S*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur; est autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione composita ex ratione simplici radii *SP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*, adeoq; tempus periodicum, si maneat Orbis radius *SP*, augeri, idq; in dimidiata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoq; adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel di-

Z mi-

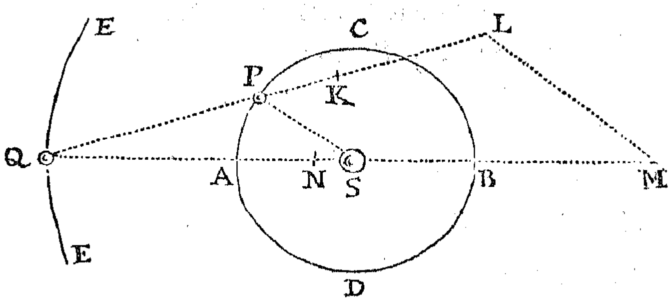
minui minus quam in Radii hujus ratione ſeſquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *S*; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui *Q*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices, augebitur ſimul ac diminuetur Radius *SP* per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata Radii & ratione dimidiata qua vis illa centripeta corporis centralis *S* per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *Q* diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam quod Ellipſeos a corpore *P* deſcriptæ axis ſeu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & in ſingulis corporis revolutionibus per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* in Quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta qua corpus *S* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, ſi augeatur diſtantia *PS*, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, adeoq; ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ *PS*, & propterea, per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem ſeu Apſidem ſummam regredi. In Conjunctione vero & Oppoſitione, vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* differentia eſt inter vim qua corpus *S* trahit corpus *P* & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione diſtantiæ *PS*, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ *PS*, adeoq; per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem progredi. In locis inter Syzygias & Quadraturas, pendet motus Augis ex cauſa utraq; conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in Syzygiis ſit quaſi dupla major quam vis *LM* in quadraturis, exceſſus in tota revolutione erit penes vim *KL*, transferetq; Augem ſingulis

re-

revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum *S*, *P* corporibus pluribus *Q*, *Q*, *Q* &c. in Orbe *QE* consistentibus, undeq; cingi. Namq; horum actionibus actio ipsius S minuetur undiq; ,decrescetq; in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ *SP*, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atq; adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam *KL* seu *NM*−*LM*, progredientur velocius, inq; Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.



Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: Manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoq; Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hu-

hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoq; si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas, & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum S, *P*, *Q*, ubi Apsides orbis *PAB* sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi Apsides sunt in Syzygiis. Si Apsides constituantur in quadraturis ratio prope Apsides minor est, & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in minore quam duplicata ratione distantiæ Apsidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apsidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apsides constituuntur in Syzygiis, vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires L*M* in quadraturis additæ viribus corporis S componunt vires in ratione minore, & vires *K*L in Syzygiis subductæ viribus corporis *S* relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter Apsides, minima in quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apsidum a quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetq; Excentricitatem Ellipseos; inq; transitu a Syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum Orbis *QES* immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ sunt

cau-

causa illa tota, vis ML agendo semper secundum planum Orbis PAB, nunquam perturbat motus in latitudinem, quodq; vis NM ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusq; P de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadraturis ad Syzygias, augetq; vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatq; ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post quadraturas, id est inter C & A, D & B, intelligetur ex modo expositis quod, in transitu corporis P a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usq; ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usq; ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaq; diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. Et simili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur, ubi nodi sunt in Octantibus alteris inter A & D, B & C. Inclinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsibus, diminuitur, fitq; omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis & corpus in Syzygiis: dein crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat, Nodisq; ad Syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus P ubi nodi sunt in quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, idq; in partem versus Q, in transitu suo a nodo C per Conjunctionem A ad nodum D; & in contrariam partem in transitu a nodo D per Oppositionem B ad nodum C; manifestum est quod in motu suo a nodo C, corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo CD, usq; dum perventum est ad nodum proximum; adeoq; in hoc nodo longissime distans a plano illo primo CD, transit per planum Orbis QES,

non

non in plani illius Nodo altero *D*, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *Q*, quodq; proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et similiargumento pergent Nodi recedere in transitu Corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuo recedunt, in Syzygiis (ubi motus in latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis intermediis conditionis utriusq; participes recedunt tardius, adeoq; semper vel retrogradi vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti errores sunt paulo majores in conjunctione Corporum *P*, *Q* quam in eorum Oppositione, idq; ob majores vires generantes *N M* & *M L*.

Corol. 13. Cumq; rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *Q*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *Q* tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *S* & *P* Systema. Et ex aucto corpore *Q*, auctaq; adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus distantiis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *Q* circum Systema corporum *P* & *S* revolvitur.

Corol. 14 Cum autem vires *N M*, *M L*, ubi corpus *Q* longinquum est, sint quamproxime ut vis *Q K* & ratio *P S* ad *Q S* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *P S*, tum corporis *Q* vis absoluta, ut *Q S cub.* reciproce; sint autem vires illæ *N M*, *M L* causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcedentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante corporum *S* & *P* Systemate, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis *Q* & ratione triplicata inversa distantiæ *Q S*. Unde si Systema corporum *S* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *Q*, vires illæ *N M*, *M L* & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde si magnitudo corporis *Q* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ

N M

NM, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *Q* e corpore *S* spectati, & vice versa. Namq; hæ rationes eædem sunt atq; ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium *QE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum *Q* & *S* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est vis corporis *S*, qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *Q*, qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunq; corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML* cæteris stantibus sunt ut Radius *SP*, & harum effectus periodici (per Corol. 2, Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *S* spectati (id est tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum *S*, *P*, *Q* Systemate, ubi *P* circum *S* sibi propinquum, & *S* circum *Q* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *S* apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverse. Et inde motus medius

Au-

Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterq; erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis *P A B* non mutantur motus Augis & Nodorum sensibilitur, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *L M* nunc major sit nunc minor quam radius *P S*, Exponatur vis mediocris *L M* per radium illum *P S*, & erit hæc ad vim mediocrem *QK* vel *QN* (quam exponere licet per *QS*) ut longitudo *P S* ad longitudinem *QS*. Est autem vis mediocris *QN* vel *QS*, qua corpus retinetur in orbe suo circum *Q*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S*, in ratione composita ex ratione radii *QS* ad radium *P S*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *S* ad tempus periodicum corporis *S* circum *Q*. Et ex æquo, vis mediocris *L M*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S* (quave corpus idem *P* eodem tempore periodico circum punctum quodvis immobile *S* ad distantiam *P S* revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia *P S*, datur vis mediocris L*M*; & ea data datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *P S*, *MN*.

Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus *P* circum corpus S revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem S ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *S* concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *S*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis *Q*, quam in Quadraturis. Et Nodi annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *Q* vel *S*, quiescent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoq; inclinatio

comvariabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaq; revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *S* ex materia non fluida conſtantem ampliari & extendi uſq; ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuq; eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore Lemmate) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam ſuperficies Globi, & ſic fluet in alveo refluetq; ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio *Q*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par eſt ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum ſuum (per Legum Corol. 5) ut & Globi de curſu rectilineo uniformiter tracti (per Legum Corol. 6.) Accedat autem corpus *Q*, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorſum in Quadraturis, facietq; ipſam deſcendere uſq; ad Syzygias; & vis *KL* trahet eandem ſurſum in Syzygiis, ſiſtetq; deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſq; ad Quadraturas.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat & minuatur Globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; ſed Oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo, gyroſq; compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eiq; inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſq; Oſcillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus eſt ubi Nodi ſunt in Syzygiis. Inde in progreſſu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impreſſum uſq; dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatq; motum novum in contrariam partem: Atq; hac ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus post Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem est ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atq; adeo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si Globus juxta æquatorem vel depressior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim ex motu Nodorum innotescit constitutio Globi. Nimirum si Globus polos eosdem constanter servat & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunq; oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neq; propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est quod is axem suum axisq; inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa superficiei parte qua prius, impulsu quocunq; novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroq; (per Legum Corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atq; adeo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus abſq; primo generaret; atq; adeo impulſuum amborum factorum in loca quæcunq;: Generabunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si Globus plano quocunq; per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte dividi intelligatur in duo hemiſphæria, urgebit ſemper vis illa utrumq; hemiphærium æqualiter, & propterea Globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum Globi, facietq; polos ejus errare per ipſius ſuperſiciem, & circulos circum ſe punctumq; ſibi oppoſitum perpetuo deſcribere. Neq; corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Caſu, per Corol. 21, Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione, per Corol. 20, Nodi regredientur; vel deniq; ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur: & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

Prop. LXVII. Theor. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q, circa interiorum P, S commune Gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum S, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

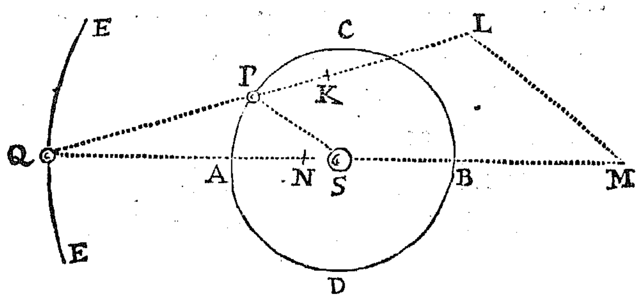
Nam corporis Q attractiones versus S & P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum S & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum S, quæq; quadrato distantiæ QC magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ QS: ut rem perpendenti facile constabit.

Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q circa interiorum P & S commune gravitatis centrum C, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atq; cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.

Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus Q conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis illorum duorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus Q ex una na parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *Q* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit, hoc est ubi corpus intimum & maximum *S* lege cæterorum attrahitur: fitq; major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *S*, moveri incipit & magis deinceps magisq; agitatur.

Corol. Et hinc si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ



sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahent agitentq;, & Orbitæ cujusq; umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum Omnium.

Prop.

Prop. LXIX. Theor. XXIX.

In Systemate corporum plurium A, B, C, D &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi, & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sint reciproce ut Quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D* &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunq; distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunq; communem ex distantiis ab unoquoq; trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol, 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunq; accedendi ad invicem, sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris aut Aeris Mediive cujuscunq; seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunq; impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens: ut in Defininitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunq; positis consequentur: deinde ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

SECT. XII.

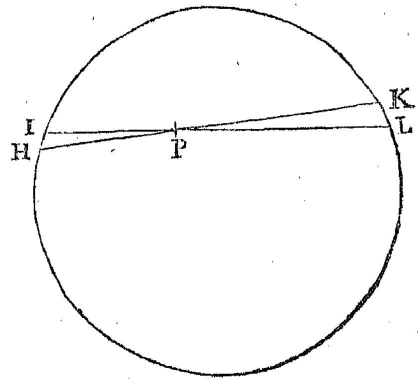
De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

Prop. LXX. Theor. XXX.

Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit $HIKL$ superficies illa Sphærica, & P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quam minimos HI, KL intercipientes; & ob triangula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis HP, LP proportionales, & superficiei Sphæricæ particulæ quævis, ad HI & KL rectis per punctum P transeuntibus undiq; terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum

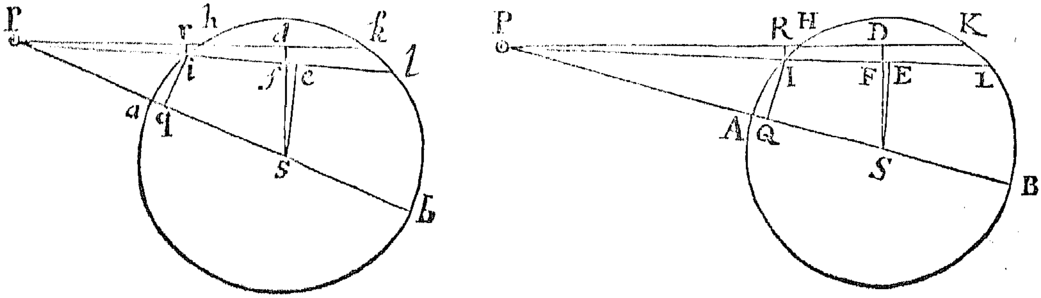
harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur in contrarias partes æqualiter factæ ſe mutuo deſtruunt. Et ſimili argumento attractiones omnes per totam Sphæricam ſuperficiem a contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.



Prop. LXXI. Theor. XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

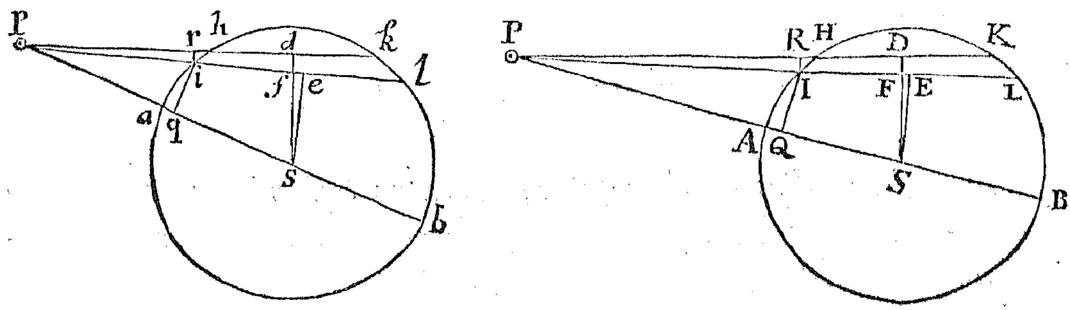
Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ ſuperficies Sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* deſcriptæ, & *P*, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur a corpuſculis lineæ



PHK, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales ab invicem arcus, quam minimũ differentes *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum

 SD,

SD, sd ſecent PL, pl in F & f. Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq; & ob æquales DS & ds, ES & es, & angulos evaneſcentes DPE & dpe, lineæ PE, PF & pe, pf & lineolæ DF, df pro æqualibus habeantur: quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaq; conſtitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & pf ad pi ut DF vel df ad ri; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri, hoc eſt (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus IH ad arcum ih. Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut SE vel se ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus ih convolutione ſemicirculi akb circa diametrum ab deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p, ſunt (per Hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum a corporibus, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntq; hæ vires ad ipſarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2 reſolutione virium) ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf. Unde ex æquo fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi p verſus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad



pf

$\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum *KL*, *kl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.*; inq; eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraq; ſuperficies Sphærica, capiendo ſemper $sd = SD$ & $se = SE$, diſtingui poteſt. Et per Compoſitionem, vires totarum ſuperficierum Sphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Prop. LXXII. Theor. XXXII.

Si ad Sphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, ac detur ratio diametri Sphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus; dico quod vis qua corpuſculum attrahitur proportionalis erit ſemidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a Sphæris duabus attrahi, & diſtantias a centris proportionales eſſe diametris, Sphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Hinc attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. Q. E. D.

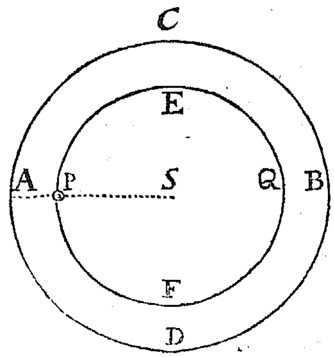
Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes revolvantur, ſintq; diſtantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris; tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Theor. IV.

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII.

Si ad sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.

In Sphæra *ABCD*, centro *S* descripta, locetur corpusculum *P*, & centro eodem *S* intervallo *SP* concipe Sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, per Theor. XXX. quod Sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Theor. XXXII. hæc est ut distantia *PS*. Q. E. D.



Scholium.

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbes adeo tenues ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum, juxta Methodum sub initio in Lemmatis generalibus expositam. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

Prop.

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro, per Theor. XXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio Sphæræ totius, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ. Nam per Theor. XXXII. si distantiæ sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione, & distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoq; erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum extra Sphæram homogeneam positum trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusq; in duplicata ratione distantiæ a particula.

Prop. LXXV. Theor. XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, dico quod Sphæra quævis alia similaris attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ ejus a centro Sphæræ trahentis,(per Theor. XXXI,) &

prop-

propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Theor XXXIV) reciproce proportionalis quadrato distantiæ ejus a centro Sphæræ; adeoq; huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namq; hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoq; cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

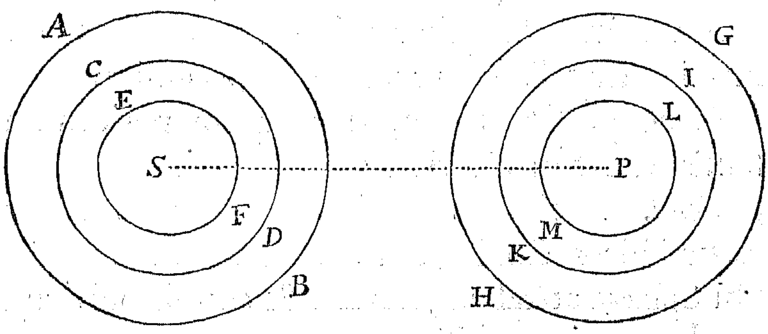
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

Prop. LXXVI. Theor. XXXVI.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quod materiæ densitatem & vim attractivam) utcunq; dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undiq; similares, & vis attractiva puncti cujusq; decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Sunto

Sunto Sphæræ quotcunq; concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF* &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ, per Theor. XXXV, trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunq; creſcat vel decreſcat: & addita materia non attractiva compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inq; distantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusq; virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintq; distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

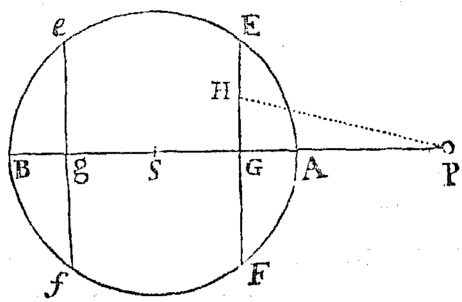
Prop. LXXVII. Theor. XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.

Cas 1. Sit *ACBD* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpusculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, *EF*, *ef* plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; *Gg* intersectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*.

Puncti

Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P* secundum lineam *PH* exercita est ut distantia *PH*, & (per Legum Corol. 2.) secuncundum lineam *PG*, seu versus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc est plani totius vis, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut numerus punctorum ductus in distantiam *PG*: id est ut contentum sub plano ipso *EF* & distantia illa *PG*. Et similiter vis plani *ef*, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam *Pg*; sive ut huic æquale planum *EF* ductum in distantiam illam *Pg*; & summa virium plani utriusq; ut planum *EF* ductum in summam distantiarum *PG* + *Pg*, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam *PS*, hoc est, ut duplum planum *EF* ductum in distantiam *PS*, vel ut summa æqualium planorum *EF* + *ef* ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam *PS*, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui *S* a corpusculo *P*. Q. E. D.



Cas. 2. Trahat jam corpusculum *P* Sphæram *ACBD*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia *PS*. Q. E. D.

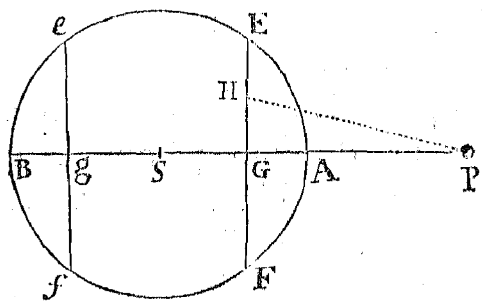
Cas 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodq; trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atq; adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpus-

 culo

culo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. Q. E. D.

Cas. 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

Cas, 5. Locetur jam corpusculum p intra Sphæram $ACBD$, & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia pg; & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo & distantia pG; erit vis ex utraq; composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS, distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc est attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Q. E. D.



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur Sphæra nova intra Sphæram priorem $ACBD$ sita, probabitur ut prius, quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusq; in se invicem, erit ut distantia centrorum pS. Q. E. D.

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunq; dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undiq; similares; & vis attractiva puncti cujusq; sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra Sphærarum.

De-

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente, eodem modo quo Propoſitio LXXVII. ex Propoſitione LXXV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in Propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum, conditionis jam deſcriptæ, ſuntq; corpora attracta Sphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum Caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroq; Caſu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum vires centripetas eadem lege in receſſu a centro decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis. Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet: Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determi nare, ut ſequitur.

Lemma XXIX.

Si deſcribantur centro S circulus quilibet AEB, (Vide Fig. Prop. ſequentis) *& centro P circuli duo EF, ef, ſecantes priorem in E, e, lineamq; PS in F, f; & ad PS demittantur perpendicula ED, ed: dico quod ſi diſtantia arcuum EF, ef in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis Dd ad lineam evaneſcentem Ff ea ſit, quæ lineæ PE ad lineam PS.*

Nam ſi linea *Pe* ſecet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evaneſcente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob ſimilia triangula *EDT*, *edt*, *EDS*; erit *Dd* ad *Ee* ut *DT* ad *ET* ſeu *DE* ad

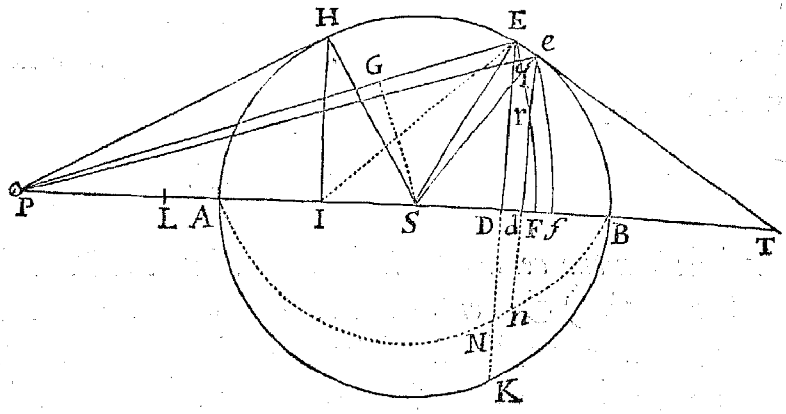
 ES,

ES, & ob triangula *Eqe*, *ESG* (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, erit *Ee* ad *qe* ſeu *Ff*, ut *ES* ad *SG*, & ex æquo *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc eſt (ob ſimilia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. Q.E.D.

Prop. LXXIX. Theor. XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evaneſcens E F f e, *convolutione ſui circa axem* P S, *deſcribat ſolidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſita ex ratione ſolidi* D E q. x F f *& ratione vis qua particula data in loco* F f *traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primo conſideremus vim ſuperficiei Sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente Sphæræ radio *PE*, (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de Sphæra & Cylindro.) Et hujus vis ſecundum lineas *PE* vel *Pr* undiq; in ſuperficie conica ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola *Dd*, vel quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato Sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at ſecundum lineam *PS* ad centrum *S* tenden-



tem

tem minor, in ratione PD ad PE, adeoq; ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd; & superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, cum lineolæ omnes Dd sibi invicem æquentur, adeoq; pro datis haberi possint, ut summa omnium PD ducta in Dd, id est, ut $\frac{1}{2}\, PFq. - \frac{1}{2}\, PDq.$ sive $\frac{1}{2}\, PEq. - \frac{1}{2}\, PDq.$ vel $\frac{1}{2}\, DEq.$ ductum in Dd; hoc est, si negligatur data $\frac{1}{2}\, Dd$, ut DE *quad.* Ducatur jam superficies FE in altitudinem Ff; & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq. \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PF exercet in corpusculum P. At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq. \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

Prop. LXXX. Theor. XL.

Si ad Sphæræ alicujus AEB, centro S descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem AB, in quo corpusculum aliquod P locatur, erigantur de punctis singulis D perpendicula DE, Sphæræ occurrentia in E, & in ipsis capiantur longitudines DN, quæ sint ut quantitas $\dfrac{DEq. \times PS}{PE}$ & vis quam Sphæræ particula sita in axe ad distantiam PE exercet in corpusculum P conjunctim: dico quod vis tota, qua corpusculum P trahitur versus Sphæram, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ AB & linea curva ANB, quam punctum N perpetuo tangit.

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn. Per Theorema superius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpusculum P est ut $DEq. \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem per Lemma ma novissimum, Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq. \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq. \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEq.}$: erit vis qua corpusculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiæ corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PEqq.}$: erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

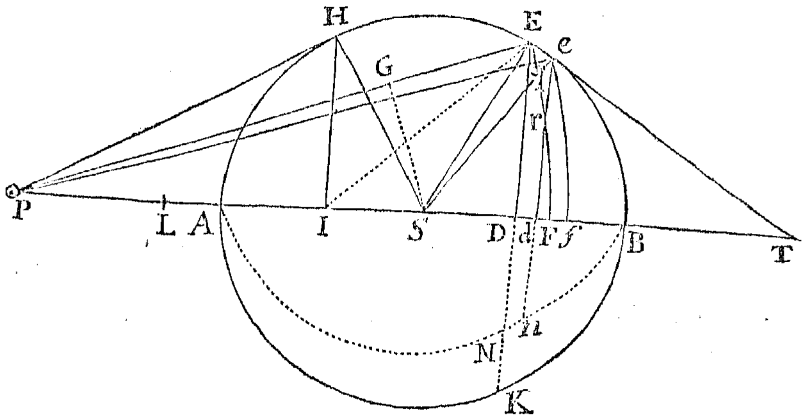
Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Prop. LXXXI. Prob. XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area $ABNA$.

A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa Normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per

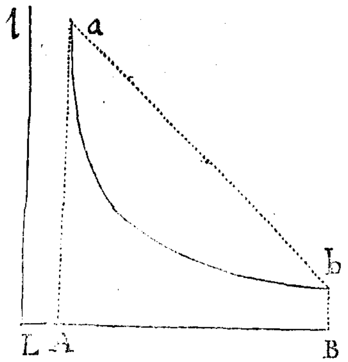
(per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) $PEq.$ æquale $PSq. + SEq. + 2PSD$. Eſt autem $SEq.$ ſeu $SHq.$ (ob ſimilitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo $PEq.$ æquale eſt contento ſub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc eſt, ſub PS & $2LS + 2SD$, id eſt, ſub PS & $2LD$. Porro DE *quad* æquale eſt $SEq. - SDq.$ ſeu $SEq. - LSq. + 2SLD - LDq.$ id eſt, $SLD - LDq. - ALB$. Nam $LSq. - SEq.$ ſeu $LSq. - SAq.$ (per Prop. 6 Lib. 2. Elem) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaq; $2SLD - LDq. - ALB$ pro $DEq.$ & quantitas $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundum Corollarium quartum Propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq. \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innoteſcunt. Q. E. F.



Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE, dein $2PS \times LD$ pro $PEq.$, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$

Pone

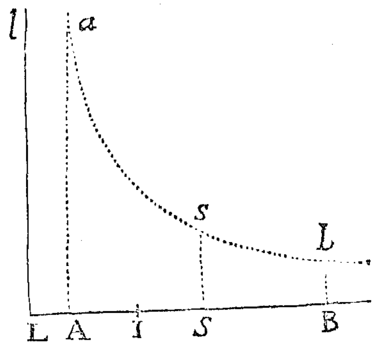
Pone DN æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2\,SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, describet aream $\frac{LBq. - LAq.}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB, per puncta a, b describatur Hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\,cub.}{2ASq.}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro $PEq.$; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq.}{PS \times LD} - \frac{ASq.}{2PS} - \frac{ALB \times ASq.}{2PS \times LDq.}$ id est (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq.}$. Si ducantur hujus partes

tres

tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq.}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ ac tertiæ, & manebit area quæſita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perq; punctum s Aſymptotis Ll, LB deſcribatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad ſingulas Sphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis, ſcribe $\frac{PE^4}{2AS^3}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SL \times SI^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \times LD^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \times LD^{\frac{1}{2}}} - \frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \times LD^{\frac{5}{2}}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt Areas totidem, *viz.* $\frac{\sqrt{2} \times SL \times SI^{\frac{3}{2}}}{LA^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{2} \times SL \times SI^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{LB^{\frac{1}{2}} \times SI^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{1}{2}} \times SI^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$ & $\frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2} \times LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{ALB \times SI^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2} \times LB^{\frac{3}{2}}}$. Et hæ poſt debitam reductionem, ſubductis poſterioribus de priori, evadunt $\frac{8\,SI\,cub.}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpuſculum P in Sphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, id eſt reciproce ut $PS\,cub. \times PI$. Q. E. I.

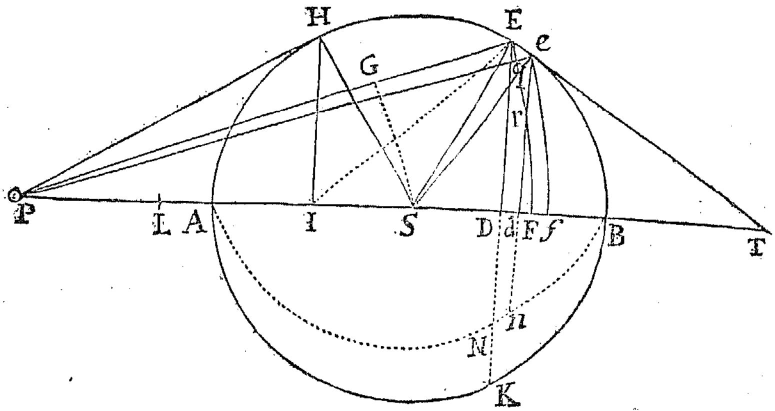
 Ea-

Eadem Methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra Sphæram, ſed expeditius per Theorema ſequens.

Prop. LXXXII. Theor. XLI.

In Sphæra centro S intervallo SA deſcripta, ſi capiantur SI, SA, SP continue proportionales: dico quod corpuſculi intra Sphæram in loco quovis I attractio eſt ad attractionem ipſius extra Sphæram in loco P, in ratione compoſita ex dimidiata ratione diſtantiarum a centro IS, PS & dimidiata ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium.

Ut ſi vires centripetæ particularum Sphæræ ſint reciproce ut diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti; vis, qua corpuſculum ſitum in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione compoſita ex dimidiata ratione diſtantiæ *SI* ad diſtantiam *SP* & ratione dimidiata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ,



ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id eſt, ratione dimidiata diſtantiarum S*I*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes dimidiatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum Sphæræ ſunt reciproce in duplicata ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in *I* ſit ad attractionem in *P*, ut diſtantia *SP* ad Sphæræ

ſemi-

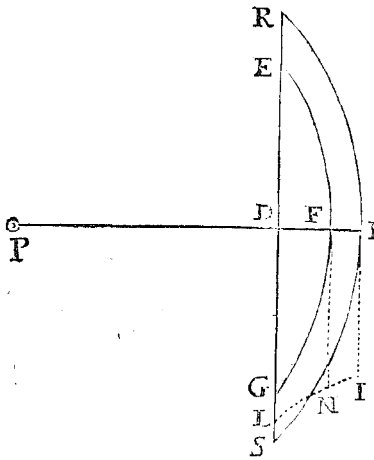
ſemidiametrum SA: Si vires illæ ſunt reciproce in triplicata ratione diſtantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*; ſi in quadruplicata, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciproce ut $PS\,cub. \times PI$, attractio in I erit reciproce ut $SA\,cub. \times PI$, id eſt (ob datum SA *cub.*) reciproce ut PI. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema vero ſic demonſtratur.

Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpore in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa ad alium quemvis locum I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq. \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq. \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq. \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob ſimilia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA dimidiata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n dimidiata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt, hiſq; proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſita ex dimidiatis illis rationibus. Q. E. D.

Prop. LXXXIII. Prob. XLII.

Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus segmentum quodcunq; attrahitur.

Sit P corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ segmentum ejus plano RDS & superficie Sphærica RBS contentum. Superficie Sphærica EFG centro P descripta secetur DB in F, ac distinguatur segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O, & erit hæc superficies (per demonstata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est n; & vis qua superficies FE trahit corpus P erit ut $\dfrac{DF \times O}{PF^{n-1}}$. Huic proportionale sit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea $BDLIB$, quam ordinatim applicata FN in longitudinem DB per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua segmentum totum $RBSD$ trahit corpus P. Q.E.I.



Prop. LXXXIV. Prob. XLIII.

Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento EBK trahatur corpus P (*Vide Fig. Prop.* 79. 80. 81.) in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE des-

describatur superficies Sphærica *EFK*, qua distinguatur segmentum in partes duas *EBKF* & *EFKD*. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius *EBKD*. Q.E.I.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deq; motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECT. XIII.

De Corporum etiam non Sphæricorum viribus attractivis.

Prop. LXXXV. Theor. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiæ at-

tracti

tracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atq; adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoq; vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusq; Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

Prop. LXXXVI. Theor. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. E. D.

Prop.

Prop. LXXXVII. Theor. XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia & ex materia æqualiter attractiva constantia seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

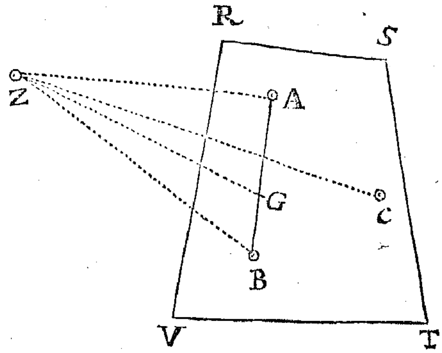
Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* adeoq; tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$ id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$ id est æquales. Si vires decrescunt in ratione quadruplicata, attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ qq.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ qq.}$ id est reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directe vel inverſe in ratione aliqua diſtantiarum.

Prop. LXXXVIII. Theor. XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuſcunq; vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia conſimili & æquali conſtantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis $RSTV$ particulæ A, B trahant corpuſculum aliquod Z viribus quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ AZ, BZ; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ in diſtantias ſuas AZ, BZ reſpective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & ſecetur ea in G ut ſit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ per Legum Corol. 2. reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur, adeoq;, cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eo-

Eodem argumento ſi adjungatur particula tertia C; & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G, vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius G & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit ac ſi globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunq; $RSTV$ ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac ſi corpus attrahens $RSTV$ eſſet Sphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum, corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

Prop. LXXXIX. Theor. XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum a ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, qua corpuſculum quodcunq; trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

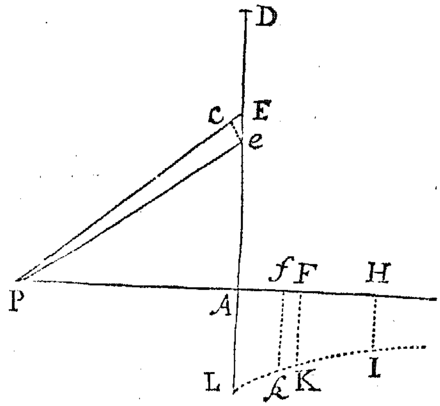
Demonſtratur eodem modo, atq; Propoſitio ſuperior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoq; ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in linea recta, corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

Prop. XC. Prob. XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunq; puncta tendant vires centripetæ decrescentes in quacunq; distantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis in recta quæ ad planum circuli per centrum ejus perpendicularis consistit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis qua corpus quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpus attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, & erigatur Normalis *FK*, quæ sit ut vis qua punctum *E* trahit corpusculum *P*. Sitq; *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpusculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. Q. E. I.



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PA* capiatur *Pf* ipsi *Pe* æqualis. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis *E* trahit ad se corpus P, ponitur esse ut *FK*, & inde vis qua punctum illud trahit corpus P versus *A* est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus *P* versus *A*, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio *AE* & latitudine *Ee*, & hoc rectangulum (ob proportionales *PE* & *AE*, *Ee* & *cE*) æquatur rectangulo *PE* $\times cE$

$\times cE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iſte trahit corpus P verſus A ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times AP \times FK$, ſive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, atq; adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciproce ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoq; area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

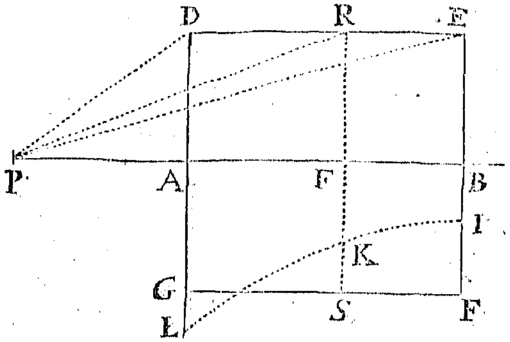
Corol. 3. Et ſi diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n ſit unitate major; attractio corpuſculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-1}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneſcet.

Prop. XCI. Prob. XLV.

Invenire attractionem corpuſculi ſiti in axe ſolidi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires centripetæ in quacunq; diſtantiarum ratione decreſcentes.

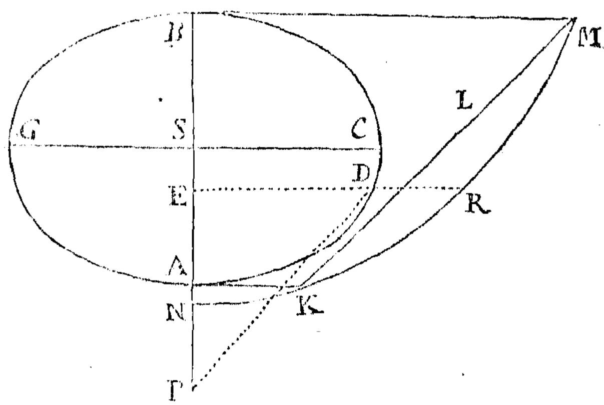
In

In ſolidum $ADEFG$ trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari ſecetur hoc ſolidum, & in ejus diametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem tranſeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo FK vi qua corpuſculum P in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in A & B; & erit attractio corpuſculi P in ſolidum ut area $LABI$. Q. E. D.

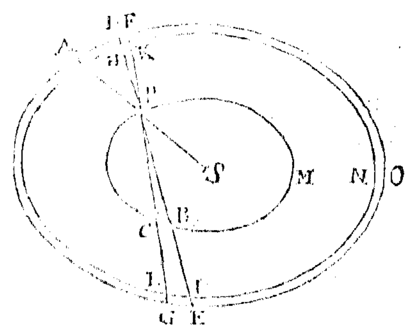


Corol. 1. Unde ſi ſolidum Cylindrus ſit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciproce ut quadrata diſtantiarum a punctis: erit attractio corpuſculi P in hunc Cylindrum ut $BA - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. XC) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, deſcribit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$ (id quod ex curvæ LKI quadratura facile oſtendi poteſt:) & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem PA deſcribit aream 1 in $PD - AD$, ductaq; in ipſarum PB, PA differentiam AB deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum poſtremum 1 in $PE - PD$, & reſtabit area $LABI$ æqualis 1 in $AB - PE + PD$. Ergo vis huic areæ proportionalis eſt ut $AB - PE + PD$.

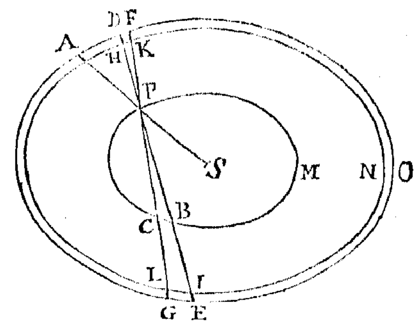
Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit qua Sphærois $AGBCD$ attratrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit $NKRM$ Sectio Conica cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in K & M; & jungantur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis qua Sphærois trahit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq. - PS \times KMRK}{PSq. + CSq. - ASq.}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3\,PS\ quad.}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.



Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem in data quavis ejusdem diametro collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G: Sintq; PCM, HLN superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior tran-



tranſeat per corpus *P* & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare Conos oppoſitos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas eſſe; & Conorum particulæ Sphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum a corpuſculo *P*, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus Sphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinq; æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni *DPF* & ſegmenti Conici *EGCB*, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a ſola Sphæroide intima *PCBM*, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, qua corpus *A* trahitur a Sphæroide tota *AGOD*, ut diſtantia *PS* ad diſtantiam *AS*. Q. E. I.



Prop. XCII. Prob. XLVI.

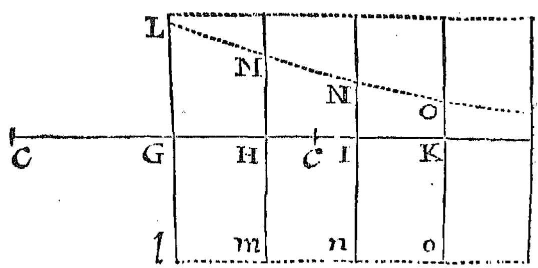
Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

E corpore dato formanda eſt Sphæra vel Cylindrus aliave figura ra regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

Prop. XCIII. Theor. XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

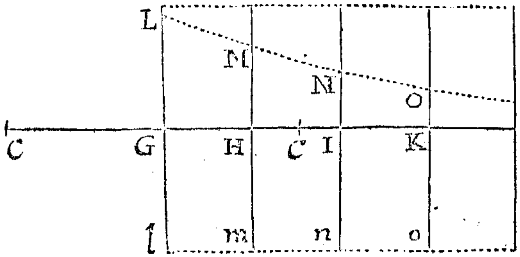
Cas. 1. Sit LGl planum quo Solidum terminatur. Jaceat autem solidum ex parte plani hujus versus I, inq; plana innumera mHM, nIN &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum,



cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) vis qua planum quodvis mHM trahit punctum C est reciproce ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis singulis lGL, nIN, oKO &c, capiantur

antur longitudines GL, IN, KO &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2} &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoq; summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa per notas quadraturarum methodos est reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis solidi totius est reciproce ut CG^{n-3} Q. E. D.

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani lGL intra solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG. Et solidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C sola vi solidi ultra planum OK siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-3}, hoc est (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-3}. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc si solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinq; terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus

cor-

corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet, propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXVII.) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur Lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunq; curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem *A* in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo *B*, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit; Suppono baſem augeri parte te quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{n}{m}OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn}O^{2}A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atq; hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est termino $\frac{mm-mn}{2nn}O^{2}A^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{nn}A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{0}$, adeoq; dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2B^{3}$ ~~seu~~ $\cancel{\frac{2}{B\,cub.}}$: adeoq; vi, quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SECT.

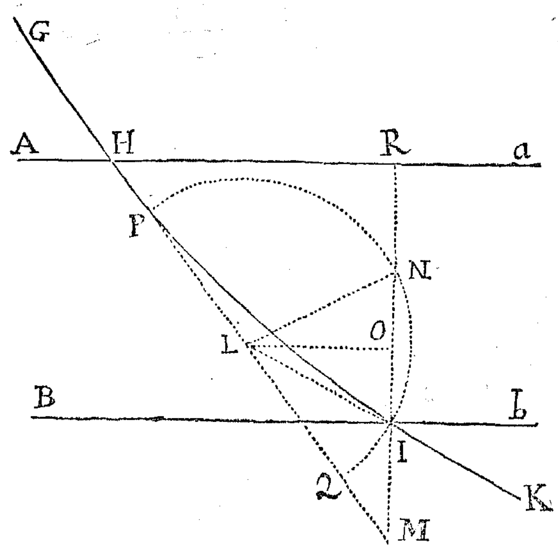
SECT. XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

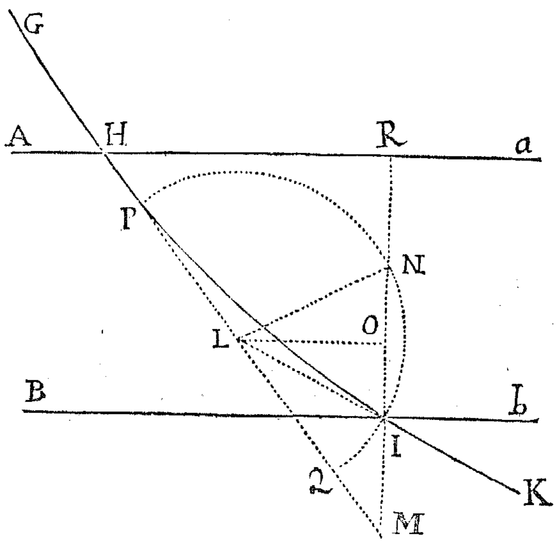
Prop. XCIV. Theor. XLVIII.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinq; terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neq; ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem attractio, in æqualibus ab utroq; plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubiq; eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

Cas. 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *A a* secundum lineam *G H*, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eaq; actione describat lineam curvam *H I*, & emergat secundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *B b* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *G H* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *A a* in *R*; & linea emergentiæ *K I* producta occurrat *H M* in *L*. Centro *L*. intervallo

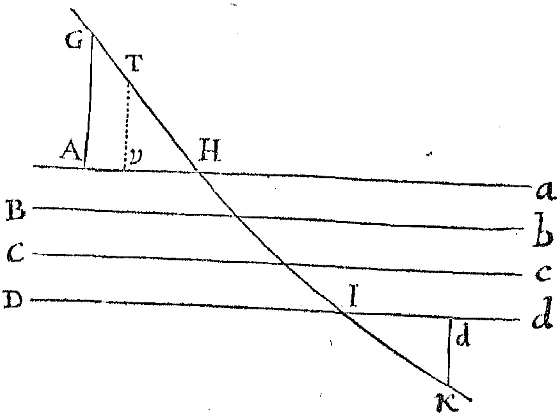


vallo LI deſcribatur circulus, ſecans tam HM in P & Q, quam MI productam in N; & primo ſi attractio vel impulſus ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) curva HI Parabola, cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & linea IM æquale ſit HM quadrato; ſed & linea HM biſecabitur in L. Unde ſi ad MI demittatur perpendiculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus IO, ON, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN, eſtq; rectangulum NMI ad rectangulum ſub latere recto & IM, hoc eſt, ad $HMq.$, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ, id eſt, differentiæ quadratorum $MLq.$ & $PLq.$ ſeu $LIq.$; & $HMq.$ datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem $LMq.$: ergo datur ratio $MLq. - LIq.$ ad $MLq.$, & diviſim, ratio $LIq.$ ad $MLq.$, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ LMR ad ſinum anguli emergentiæ LIR. Q. E. D.



Cas. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$ &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo Bb, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum Bb, erit ad ſinum

num emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuatur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio ſecundum legem quamcunq; aſſignatam continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. Q. E. D.



Prop. XCV. Theor. XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

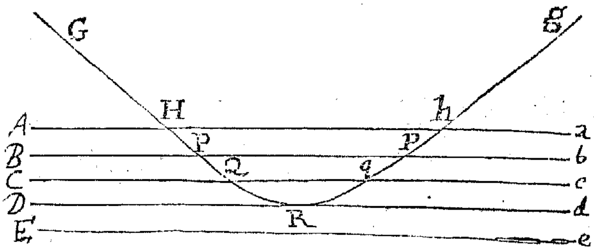
Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *A*G, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ G*H*, *IK*, in G & *K*. In GH capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et per Legum Corol. 2. diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus agendo ſecundum lineas perpendiculares nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interq; punctum *I* & lineam *dK*; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH*, *IK*.

IK. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id est, ut *AH* vel *Id* ad *v*H, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. Q. E. D.

Prop. XCVI. Theor. L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

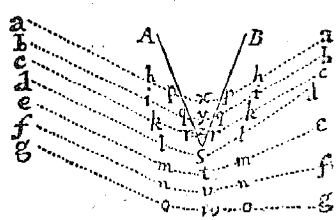
Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintq; arcus illi H*P*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *Dd*, in spatium *DdeE*: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoq; linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus medium incidentiæ. Revertetur itaq; inter plana *Cc*, *Dd* describendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph* &c. arcubus prioribus *QP*, *P*H similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h* &c. ac prius in *P*, H &c. emergetq; tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in H. Concipe jam plano-



norum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunq; assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

Scholium.

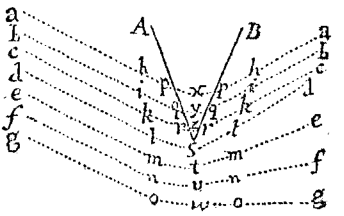
Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namq; Lucem successive propagari & spatio quasi decem minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa, invenit, & ipse quoq; expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi.



In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog*, *fnvnf*, *emtme*, *dlsld* sunt radii, arcubus *owo*, *nvn*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idq; magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in

vi-

vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.



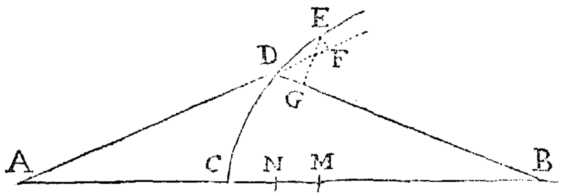
Prop. XCVII. Prob. XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodq; incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

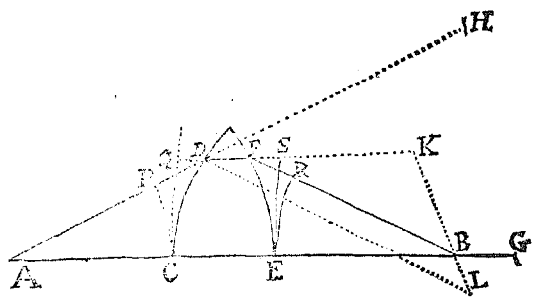
Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF* qua *AD* augetur, ad lineam *DG* qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM*, ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data ratione; centrisq; *A*, *B*, &

B, & intervallis *AM*, *BN* deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in *D*: punctum illud *D* tanget curvam quæſitam *CDE*, eandemq; ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes quas *Carteſius* in Optica & Geometria ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cum *Carteſius* maximi fecerit & ſtudioſe celaverit, viſum fuit hic propoſitione exponere.



Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atq; adeo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



Prop. XCVIII. Prob. XLVIII.

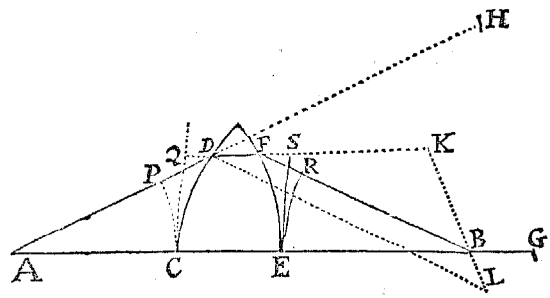
Iiſdem poſitis, & circa axem AB deſcripta ſuperficie quacunq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*,

 punctо

puncto D utcunq; assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum AB ad G ut sit BG ad CE ut $M-N$ ad N, tum AD ad H ut sit AH æqualis AG, tum etiam DF ad K ut sit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB productæ in L, ipsiq; DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. Q. E. F.

Nam concipe lineas CP, CQ ipsis AD, DF respective, & lineas ER, ES ipsis FB, FD ubiq; perpendiculares esse, adeoq; QS ipsi CE semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N, adeoq; ut DL ad DK vel FB ad FK; & divisim ut $DL-FB$ seu $PH-PD-FB$ ad FD seu $FQ-QD$; & composite ut $HP-FB$ ad FQ, id est (ob æquales HP & CG, QS & CE) $CE+BG-FR$ ad $CE-FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & $M-N$ ad N) est etiam $CE+BG$ ad CE ut M ad N: adeoq; divisim FR ad FS ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII. superficies EF cogit corpus in se secundum lineam DF incidens pergere in linea FR, ad locum B. Q. E. D.



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice ce figuratis & Aquam inter ſe claudentibus conflentur, fieri poteſt ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verum tamen diverſa diverſorum radiorum refrangibilitas impedimento eſt, quo minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quaſcunq; perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE MOTU CORPORUM

Liber SECUNDUS.

SECT. I.

De Motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

Prop. I. Theor. I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus est ut spatium movendo confectum.

NAm cum motus singulis temporis particulis amissus sit ut velocitas, hoc est ut itineris confecti particula: erit componendo motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Igitur si corpus gravitate omni destitutum in spatiis liberis sola vi insita moveatur, ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum, dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

Lem

Lemma. I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.

Sit A ad $A-B$ ut B ad $B-C$ & C ad $C-D$ &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D &c. Q. E. D.

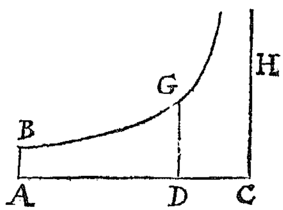
Prop. II. Theor. II.

Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & ſola vi inſita per Medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione Geometrica, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales, & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas, erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. II.) continue proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continua, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea ſunt æquales. Igitur velocitates his terminis proportionales, ſunt in progreſſione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus, & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continue proportionales, erunt in hoc etiam Caſu continue proportionales. Q. E. D.

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. I. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

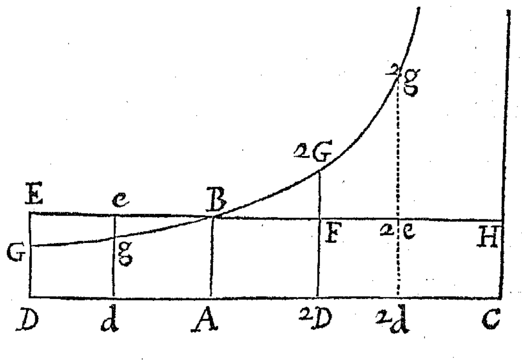
Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis *ADC*, *CH* describatur Hyperbola *BG*, sintq; *AB*, *DG* ad Asymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium eo tempore descriptum per lineam *AD*. Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *DC* in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eadem ratione.



Prop. III. Prob. I.

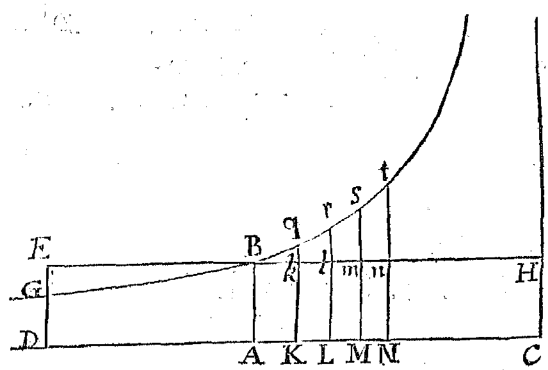
Corporis, cui dum in Medio similari recta ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodq; ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BC*, & resistentia Medii initio ascensus per rectangulum *BD* sumptum ad contrarias partes. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur Hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo, tempore *DGgd*, describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium



um aſcenſus totius EGB, tempore $AB2G2D$ ſpatium deſcenſus $BF2G$, atq; tempore $2D2G2g2d$ ſpatium deſcenſus $2GF2e2g$: & velocitates corporis (reſiſtentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$, nulla, $ABF2D$, $AB2e2d$ reſpective; atq; maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BC.

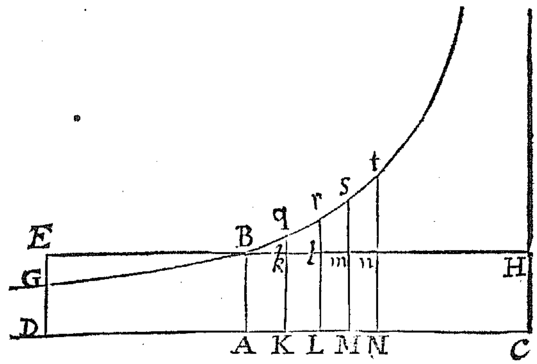
Reſolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atq; adeo (per Hypotheſin) ut reſiſtentia Medii in principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deq; vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$,



$NnHC$, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atq; adeo (per motus Legem II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progreſſione Geometrica. Quare ſi rectæ Kk, Ll, Mm, Nn &c. productæ occurrant Hyperbolæ in q, r, s, t &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$ &c. æquales, adeoq; tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area $ABqK$ (per Corol. 3 Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ ſeu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc eſt ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$ &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi,

ter-

tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus grauitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt, (per Hypotheſin) velocitatibus, atq; adeo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. Q. E. D. Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. Q. E. D.



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad exceſſum vis hujus ſupra vim qua in fine temporis illius reſiſtitur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione Arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu (atq; etiam earundem differentia in deſcenſu) decreſcit in progreſſione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione Geometrica.

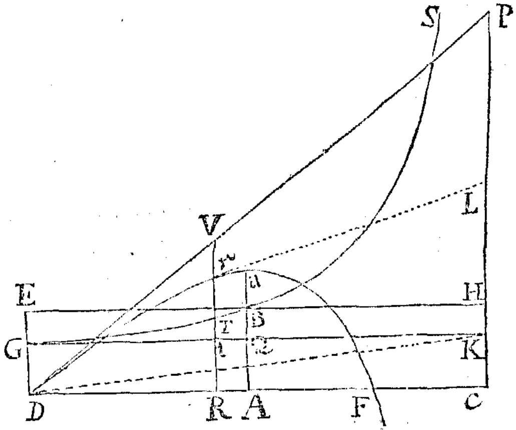
Corol. 4. Spatium vero a corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum, quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo deſcenſus initio æquantur inter ſe.

Prop.

Prop. IV. Prob. II.

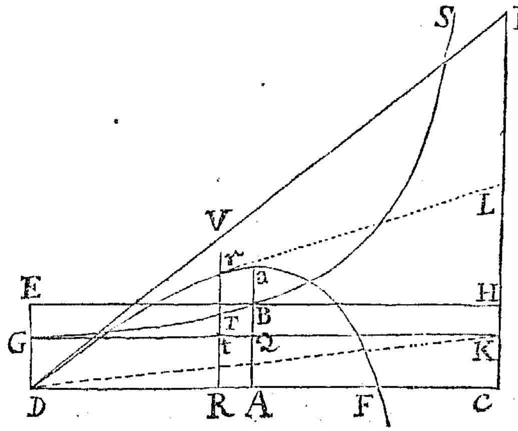
Poſito quod vis gravitatis in Medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis, in eodem reſiſtentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur Projectile ſecundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejuſdem velocitas ſub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & ſecetur *DC* in *A* ut ſit *DA* ad *AC* ut reſiſtentia Medii ex motu in altitudinem ſub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde eſt) ut ſit rectangulum ſub *DA* & *DP* ad rectangulum ſub *AC* & *PC* ut reſiſtentia tota ſub initio motus ad vim Gravitatis. Deſcribatur Hyperbola quævis *GTBS* ſecans erecta perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* ſecet *AB* in *Q*. Capiatur linea *N* in ratione ad *QB* qua *DC* ſit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *GK*, *DP* in *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem $\frac{tGT}{N}$, & Projectile tempore *DRTG* perveniet ad punctum *r*, deſcribens curvam lineam *DraF*, quam punctum *r* ſemper tangit; perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo *AB*, & poſtea ſemper



appropinquans ad Asymptoton PLC. Estq; velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL. Q. E. D.

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, adeoq; RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoq; longitudo a motu ad latus descripta erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est ut linea Rr. Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoq; linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ (seu QB) ad N, id est ut CP ad DC; atq; adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atq; Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc si Vertice D, Diametro DE deorsum producta, & latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota, ipso motus

tus initio, ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in Medio uniformi resistente describat Curvam $DraF$, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam DR, ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\,quad.}{Vr}$ & Vr est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem, quæ, si duceretur, Hyperbolam GTB tangeret in G, parallela est ipsi DK, ideoq; Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq. \times CK \times CP}{2\,CDq. \times QB}$, id est (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq. \times CK \times CP}{2\,DPq. \times QB}$. & Latus rectum $\frac{DV\,quad.}{Vr.}$ prodit $\frac{2\,DPq. \times QB}{CK \times CP}$, id est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq. \times DA}{AC \times CP}$, adeoq; ad $2DP$ ut $DP \times DA$ ad $PC \times AC$; hoc est ut resistentia ad gravitatem. Q. E. D.

Corol. 2. Unde si corpus de loco quovis D, data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur, & resistentia Medii ipso motus initio detur, inveniri potest Curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2DP$ ad latus illud rectum ut est vis Gravitatis ad vim resistentiæ, datur DP. Dein secando DC in A, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione Gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva $DraF$.

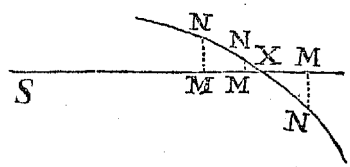
Corol. 3. Et contra, si datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis r. Nam ex data

 ta

ta ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.

Corol. 4. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; & ex aucta Velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, adeoq; velocitati semper proportionalem esse, neq; ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoq; velocitas.

Corol. 5. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex Phænominis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, cDp (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum assumpta quacunq; longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta DP, inveniantur longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per



puncta N, N, N agatur curva regularis NNN secans rectam

SM-

SMMM in X, & erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo *DF* per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem *DP* ut modo inventa longitudo *DF* ad longitudinem eandem per experimentum cognitam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum Curva Linea *DraF* quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum corpora resisti in ratione velocitatis Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant (uti posthac demonstrabitur) corpora resistuntur in duplicata ratione velocitatum. Actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis, adeoq; tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estq; resistentia (per motus Legem 2. & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

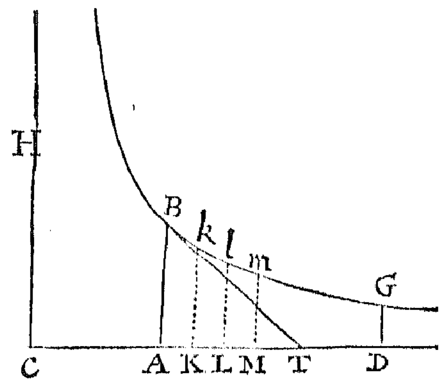
SECT. II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

Prop. V. Theor. III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & sola vi insita per Medium similare movetur, tempora vero sumantur in progressione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione Geometrica inverse, & quod spatia sunt æqualia quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia Medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in recta CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. Hyperbolæ $BklmG$, centro C Asymptotis rectangulis CD, CH, descriptæ occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, adeoq; ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et simili argumento e-



runt

runt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut $Kkq.$, $Llq.$ &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiæ, & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio secundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore descripta per aream $AKkB$, velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes Ll, Mm, &c. & longitudines descriptæ per areas Kl, Lm, &c. & composite, si tempus totum exponatur per summam partium suarum AM, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut sint CA, CK, CL, CM, &c. in progressione Geometrica, & erunt partes illæ in eadem progressione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progressione eadem inversa, atq; spatia descripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. Q. E. D.

Corol. 1. Patet ergo quod si tempus exponatur per Asymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & spatium totum descriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon spatium quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate prima AB, in Medio non resistente describere posset, per rectangulum. $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in Medio non resistente simul describi posset, ut est area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistentia Medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ, in cadente corpore, tempore AC, in Medio non resistente, generare posset velocitatem AB. Nam si ducatur BT quæ tangat Hyperbolam

in

in *B*, & occurrat Aſymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipſi *AC*, & tempus exponet quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam *AB*.

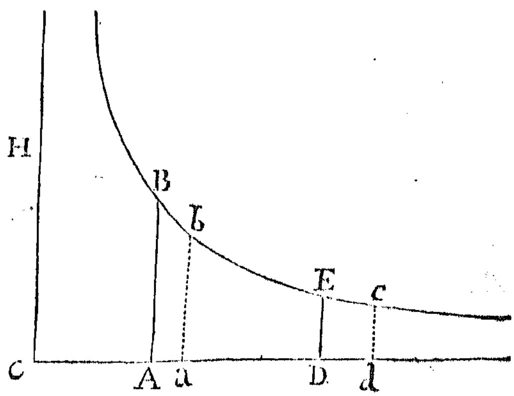
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceverſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus *AC*, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis *AB*; & inde datur punctum *B* per quod Hyperbola Aſymptotis *CH*, *CD* deſcribi debet; ut & ſpatium *ABCD*, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

Prop. VI. Theor. IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcripta Hyperbola quavis *BbEe* ſecante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Eſt ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypotheſin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc eſt ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *AB*,



AB, *DE* ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam ſuis amiſſis *AB*−*ab*, *DE*−*de* proportionales. Q. E. D.

Prop. VII. Theor. V.

Corpora Sphærica quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ ſunt ut motus primi directe & reſiſtentiæ primæ inverſe, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namq; motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & ~~corpus~~ tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut Motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoq; retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocia corpora reſiſtuntur in duplicata ratione diametrorum, Globi homogenei quibuſcunq; cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſq; erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoq; ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocia corpora reſiſtuntur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunq; cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis. Nam tempus augetur in ratione resistentiæ diminutæ, & spatium augetur in ratione temporis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocia corpora resistuntur in ratione dignitatis cujuscunq; diametrorum, spatia quibus Globi homogenei, quibuscunq; cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicata. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ sint ut D^n & E^n, spatia quibus amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si Globi non sint homogenei, spatium a Globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim sub pari velocitate major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si Globi moveantur in Mediis diversis, spatium in Medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ, & spatium in ratione temporis.

Lemma. II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Terminorum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex Terminis quibuscunq; in Arithmetica per multiplicationem, divisionem & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium absq; additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates

tes sunt Facti, Quoti, Radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica & similes. Has quantitates ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes hic considero, & eorum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitæ sunt magnitudinis, desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neq; enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Termini autem cujusq; Generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hunc Terminum.

Igitur sensus Lemmatis est, ut si quantitatum quarumcunq; perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. Momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, & contenti ABC momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$: & dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, & $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ momenta $2Aa$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respective. Et generaliter ut dignitatis cujuscunq; $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A *quad.* x B momentum fuerit $2aAB + A^2b$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4Cc$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, seu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ seu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}Ab+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB+Ab$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+Ab$. Q. E. D.

Cas. 2. Ponatur AB æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC+Gc$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB+Ab$) $aBC+AbC+ABc$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunq;. Q. E. D.

Cas. 3. Ponantur A, B, C æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli AB, momentum $aB+Ab$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti ABC, momentum $aBC+AbC+ABc$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunq; A^n est naA^{n-1}. Q. E. D.

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu A^{-1} est $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A_n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Cas. 3: ideoq; momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sive

2 a A

$2aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æqualem B, erit A^m æquale B^n, ideoq; maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} seu $\frac{nb}{A^{\frac{m}{n}}}$, adeoq; $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunq; $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-1}+nbB^{n-1}$; idq; sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunq; dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi

Tan-

Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus [Data æquatione quotcunq; fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versa] eandem celarem: rescripsit Vir Clarissimus se quoq; in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis. Utriusq; fundamentum continetur in hoc Lemmate.

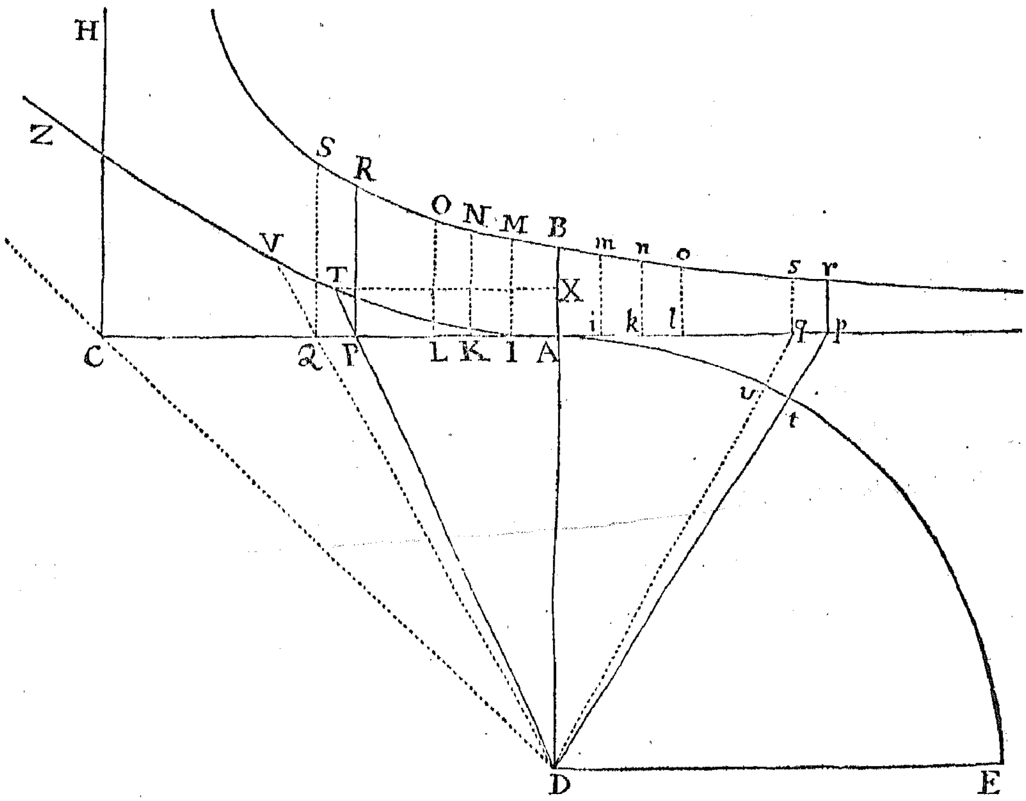
Prop. VIII. Theor. VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inq; principiis singularum partium (addendo resistentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione Geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC, ideoq; in dimidiata ratione resistentiæ) incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Asymptotis rectangulis CA, CH describatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK est ut $APq.$, erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id est ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, per motûs Leg. 2. proportionale est vi generanti KC. Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ Hyperbolicæ

KN-

KNOL ad rectangulum *KL*x*KN* ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota Hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*,



KNOL, &c. & vires absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione Geometrica. Q. E. D. Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoq; si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. Q. E. D.

Corol.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in dimidiata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

Corol. 4. Sed & particula temporis, quo spatii particula quam minima *NKLO* in descensu describitur, est ut rectangulum $KN \times PQ$. Nam quoniam spatium *NKLO* est ut velocitas ducta in particulam temporis; erit particula temporis ut spatium illud applicatum ad velocitatem, id est ut rectangulum quam minimum $KN \times KL$ applicatum ad *AP*. Erat supra *KL* ut $AP \times PQ$. Ergo particula temporis est ut $KN \times PQ$, vel quod perinde est, ut $\frac{PQ}{CK}$. Q. E. D.

Corol. 5. Eodem argumento particula temporis, quo spatii particula *nklo* in ascensu describitur, est ut $\frac{pq}{Ck}$.

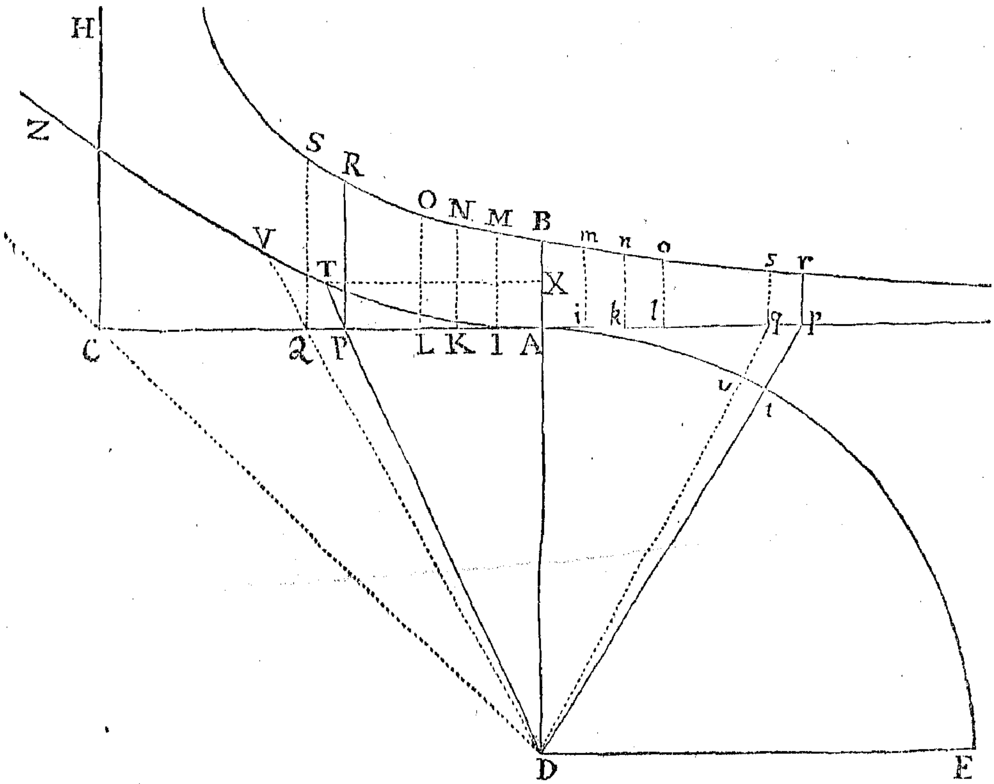
Prop. IX. Theor. VII.

Positis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circuli, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ *AC*, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* semidiametro *AD* describatur tum circuli Quadrans *AtE*, tum Hyperbola rectangula *AVZ* axem

axem habens AX, verticem principalem A & Aſymptoton DC. Jungantur Dp, DP, & erit Sector circularis AtD ut tempus aſcenſus omnis futuri; & Sector Hyperbolicus ATD ut tempus deſcenſus omnis præteriti.

Cas 1. Agatur enim Dvq abſcindens Sectoris ADt & trianguli ADp momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcrip-

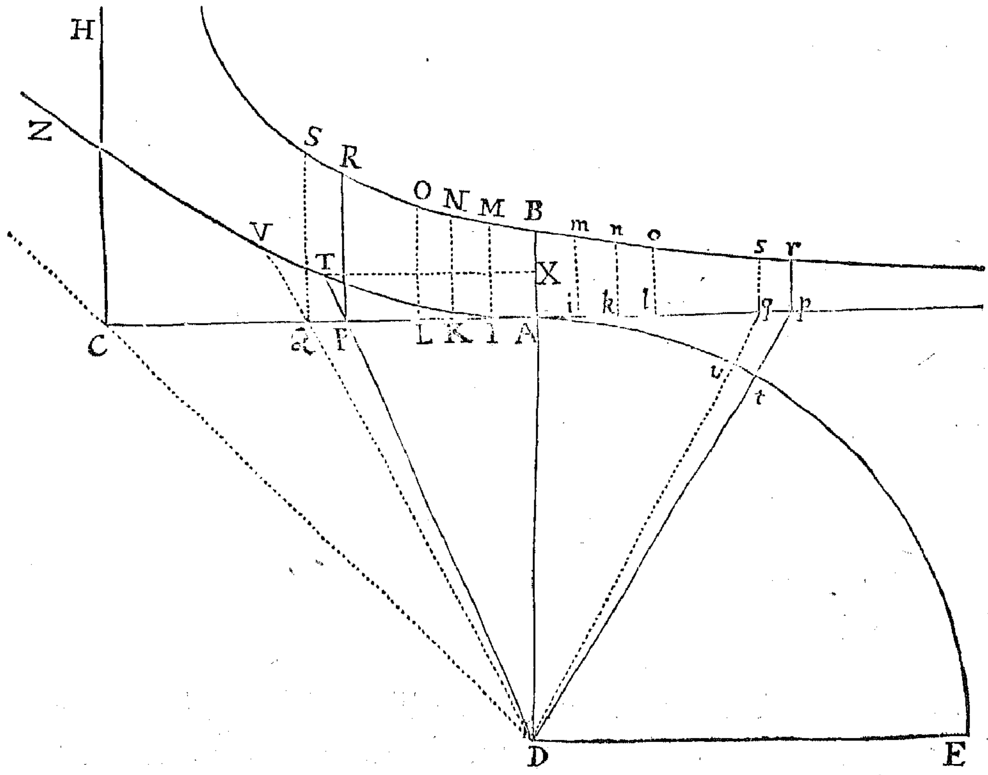


tas tDv & pDq. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp}{pD\,quad.}$. Sed $pD\,quad.$ eſt $AD\,quad. + Ap\,quad.$ id eſt $AD\,quad. + Ak \times AD$ ſeu $AD \times Ck$; & qDp eſt $\frac{1}{2}\,AD \times pq$. Ergo Sectoris particula vDt eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, per Corol. 5, Prop. VIII. ut particula temporis. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in Sectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq

 re-

respondentium, usq; dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, Sector totus ADt est ut ascensus totius futuri tempus. Q. E. D.

Cas. 2. Agatur DQV abscindens tum Sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut $DTq.$ ad $DPq.$ id est (si TX & AP parallelæ sint) ut $DXq.$ ad $DAq.$ vel $TXq.$ ad $APq.$ & divisim ut $DXq.-TXq.$ ad $ADq.-APq.$ Sed ex natura



Hyperbolæ $DXq.-TXq.$ est $ADq.$, & per Hypothesin $APq.$ est $AD \times AK$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut $ADq.$ ad $ADq.-AD \times AK$; id est ut AD ad $AD-AK$ seu AC ad CK: ideoq; Sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atq; adeo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$; & propterea per Corol. 5. Prop.

VIII.

VIII. Lib. II. ut particula temporis incremento velocitatis PQ respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur, ut summa particularum Sectoris ADT, id est tempus totum ut Sector totus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC, spatium $ABRP$, quod corpus tempore quovis ATD cadendo describit, erit ad spatium quod corpus semisse velocitatis maximæ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABRP$, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream ATD qua tempus exponitur. Nam cum sit AC ad AP ut AP ad AK, erit $2APQ$ æquale $AC \times KL$ (per Corol 1. Lem. II. hujus) adeoq; KL ad PQ ut $2AP$ ad AC, & inde LKN ad $PQ \times \frac{1}{2}AD$ seu DPQ ut $2AP \times KN$ ad $\frac{1}{2}AC \times AD$. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo ex æquo LKN est ad DTV ut $2AP \times KN \times CK$ ad $\frac{1}{2}AC$ *cub.*; id est, ob æquales CKN & $\frac{1}{4}ACq.$, ut AP ad AC; hoc est ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $ABKN$ & AVD momenta LKN & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoq; areæ totæ ab initio genitæ $ABKN$ & AVD ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. E. D.

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore descriptum, ut est area $ABnk$ ad Sectorem ADt.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum APD ad Sectorem Hyperbolicum ATD. Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus ATD, & in Medio resistente est ut AP, id est ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum ApD ad Sectorem circularem AtD; sive ut recta Ap ad arcum At.

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut Sector ADT ad triangulum ADC: & tempus, quo velocitatem Ap in Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus At ad ejus Tangentem Ap.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2. & 3. Theor. VI, Lib. II. indeq; datur & spatium quod semisse velocitatis illius dato tempore describi potest, & tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem ADT vel ADt ad triangulum ADC in ratione temporum; dabitur tum velocitas AP vel Ap, tum area ABKN vel ABkn, quæ est ad Sectorem ut spatium quæsitum ad spatium jam ante inventum.

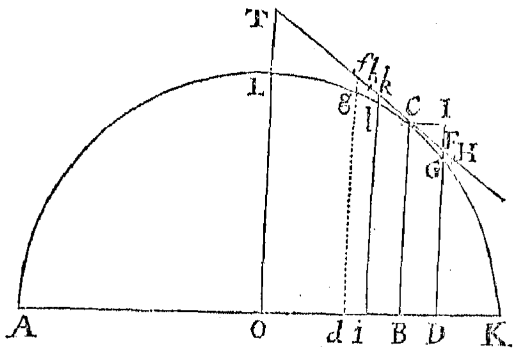
Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio ABnk vel ABNK, dabitur tempus ADt vel ADT.

Prop. X. Prob. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitq; resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis.

Sit AK planum illud plano Schematis perpendiculare; ACK linea curva; C corpus in ipsa motum; & FCf recta ipsam tangens

gens in *C*. Fingatur autem corpus *C* nunc progredi ab A ad *K* per lineam illam A*CK*, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progreſſu impediri a Medio, in regreſſu æque promoveri, ſic ut in iiſdem locis eadem ſemper ſit corporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus deſcribat corpus progrediens arcum quam minimum *CG*, & corpus regrediens arcum *Cg*; & ſint *CH*, *Ch* longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco *C* exeuntia, his temporibus, abſq; Medii & Gravitatis actionibus deſcriberent: & a punctis *C*, *G*, *g* ad planum horizontale A*K* demittantur perpendicula *CB*, *GD*, *gd*, quorum *GD* ac *gd* tangenti occurrant in *F* & *f*. Per Medii reſiſtentiam fit ut corpus progrediens, vice longitudinis *CH*, deſcribat ſolummodo longitudinem *CF*; & per vim gravitatis tranſfertur corpus de *F* in *G*: adeoq; lineola *HF* vi reſiſtentiæ, & lineola *FG* vi gravitatis ſimul generantur. Proinde (per Lem. X. Lib. I.) lineola *FG* eſt ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim, adeoq; (ob datam gravitatem) ut quadratum temporis; & lineola *HF* ut reſiſtentia & quadratum temporis, hoc eſt ut reſiſtentia & lineola *FG*. Et inde reſiſtentia fit ut *HF* directe & *FG* inverſe, ſive ut $\frac{HF}{FG}$. Hæc ita ſe habent in lineolis naſcentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non ſunt accuratæ.



Et ſimili argumento eſt *fg* ut quadratum temporis, adeoq; ob æqualia tempora æquatur ipſi *FG*; & impulſus quo corpus regrediens urgetur eſt ut $\frac{hf}{fg}$. Sed impulſus corporis regredientis

&

& resistentia progredientis ipso motus initio æquantur, adeoq; & ipsis proportionales $\frac{hf}{fg}$ & $\frac{HF}{FG}$ æquantur; & propterea ob æquales fg & FG, æquantur etiam hf & HF, suntq; adeo CF, CH (vel Ch) & Cf in progressione Arithmetica, & inde HF semidifferentia est ipsarum Cf & CF; & resistentia quæ supra fuit ut $\frac{HF}{FG}$, est ut $\frac{Cf-CF}{FG}$.

Est autem resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis. Velocitas autem ut descripta longitudo CF directe & tempus $\sqrt{FG}$ inverse, hoc est ut $\frac{CF}{\sqrt{FG}}$, adeoq; quadratum velocitatis ut $\frac{CFq.}{FG}$. Quare resistentia, ipsiq; proportionalis $\frac{Cf-CF}{FG}$ est ut Medii densitas & $\frac{CFq.}{FG}$ conjunctim; & inde Medii densitas ut $\frac{Cf-CF}{FG}$ directe & $\frac{CFq.}{FG}$ inverse, id est ut $\frac{Cf-CF}{CFq.}$. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc colligitur, quod si in Cf capiatur Ck æqualis CF, & ad planum horizontale AK demittatur perpendiculum ki, secans curvam ACK in l; fiet Medii densitas ut $\frac{FG-kl}{CF\times\overline{FG+kl}}$ Erit enim fC ad kC ut $\sqrt{fg}$ seu $\sqrt{FG}$ ad $\sqrt{kl}$, & divisim fk ad kC, id est $Cf-CF$ ad CF ut $\sqrt{FG}-\sqrt{kl}$ ad $\sqrt{kl}$; hoc est (si ducatur terminus uterq; in $\sqrt{FG}+\sqrt{kl}$) ut $FG-kl$ ad $kl+\sqrt{FG\times kl}$, sive ad $FG+kl$. Nam ratio prima nascentium $kl+\sqrt{FG\times kl}$ & $FG+kl$ est æqualitatis. Scribatur itaq; $\frac{FG-kl}{FG+kl}$ pro $\frac{Cf-CF}{CF}$; & Medii densitas, quæ fuit ut $\frac{Cf-CF}{CF\,quad.}$ evadet ut $\frac{FG-kl}{CF\times\overline{FG+kl}}$.

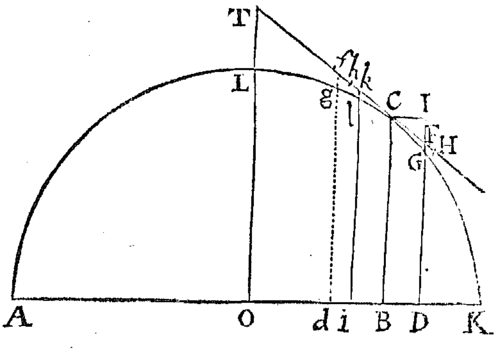
Corol.

Corol. 2. Unde cum $2\,HF$ & $Cf - CF$ æquentur, & FG & kl (ob rationem æqualitatis) componant $2\,FG$; erit $2\,HF$ ad CF ut $FG - kl$ ad $2\,FG$; & inde HF ad FG, hoc eſt reſiſtentia ad gravitatem, ut rectangulum CF in $FG - kl$ ad $4\,FG$ *quad.*

Corol. 3. Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AB & ordinatim applicatam BC; (ut moris eſt) & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur: ut in Exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea ACK ſemicirculus ſuper diametro AK deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur ſemicirculi diameter AK in O; & dic OK n, OB a, BC e, & BD vel Bi o: & erit DGq. ſeu $OGq. - ODq.$ æquale $nn - aa - 2ao - oo$ ſeu $ee - 2ao - oo$; & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$ & evadet $DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ &c.

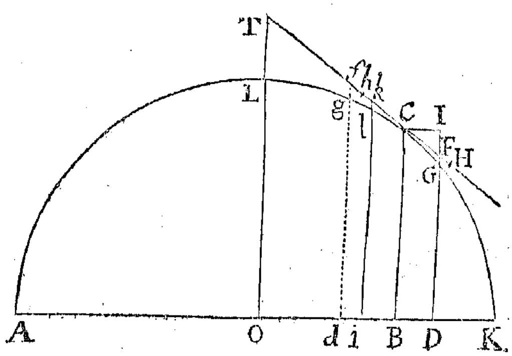


Hujuſmodi Series diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum in quo quantitas illa extat unius dimenſionis; tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ BC inſiſtentis ad indefinitæ quantitatis initium B; ſecundus terminus

nus qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter BC & DF, id est lineolam IF, quæ abscinditur complendo parallelogrammum $BCID$, atq; adeo positionem Tangentis CF semper determinat: ut in hoc casu capiendo IF ad IC ut est $\frac{ao}{e}$ ad o seu a ad e. Terminus tertius, qui hic est $\frac{nnoo}{2e^3}$ designabit lineolam FG, quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoq; determinat angulum contactus FCG, seu curvaturam quam curva linea habet in C. Si lineola illa FG finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum subsequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinite minores tertio, ideoq; negligi possunt. Terminus quartus, qui hic est $\frac{anno^3}{2e^5}$, exhibet variationem Curvaturæ; quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum Serierum in solutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea CF est latus quadratum ex CIq. & IFq. hoc est ex BDq. & quadrato termini secundi. Estq; $FG+kl$ æqualis duplo termini tertii, & $FG-kl$ æqualis duplo quarti. Nam valor ipsius DG convertitur in valorem ipsius il, & valor ipsius FG in valorem ipsius kl, scribendo Bi pro BD, seu $-o$ pro $+o$. Proinde cum FG sit $-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{anno^3}{2e^5}$ &c. erit $kl=-\frac{nnoo}{2e^3}+\frac{anno^3}{2e^5}$ &c. Et horum summa est $-\frac{nnoo}{e^3}$, differentia $-\frac{anno^3}{e^5}$. Terminum quintum & sequentes hic negligo, ut infinite minores quam qui in hoc Problemate considerandi veniant. Itaq; si designetur Series universaliter his terminis $\mp Qo-Roo-So^3$ &c. erit CF æqualis $\sqrt{oo+QQoo}$, $FG+kl$ æqualis $2Roo$, & $FG-kl$ æqualis $2So^3$. Pro CF, $FG+kl$ & $FG-kl$ scribantur hi hi earum valores, & Medii densitas quæ erat ut $\frac{FG - kl}{CF \text{ in } FG + kl}$ jam fiet ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Deducendo igitur Problema unumquodq; ad seriem convergentem, & hic pro Q, R & S scribendo terminos seriei ipsis respondentes; deinde etiam ponendo resistentiam Medii in loco quovis G esse ad Gravitatem ut $S\sqrt{1+QQ}$ ad $2RR$, & velocitatem esse illam ipsam quacum corpus, de loco C secundum rectam CF egrediens, in Parabola, diametrum CB & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps moveri posset, solvetur Problema.

Sic in Problemate jam solvendo, si scribantur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ seu $\frac{n}{e}$ pro $\sqrt{1+QQ}$, $\frac{nn}{2e^3}$ pro R, & $\frac{ann}{2e^3}$ pro S, prodibit Medii densitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$ seu $\frac{OB}{BC}$, id est ut Tangentis longitudo illa CT, quæ ad semidiametrum OL ipsi AK normaliter insistentem terminatur; & resistentia erit ad gravitatem ut a ad n, id est ut OB ad circuli semidiametrum OK, velocitas autem erit ut $\sqrt{2BC}$. Igitur si corpus C certa cum velocitate, secundum lineam ipsi OK parallelam, exeat de loco L, & Medii densitas in singulis locis C sit ut longitudo tangentis CT, & resistentia etiam in loco aliquo C sit ad vim gravitatis ut OB ad OK; corpus illud describet circuli quadrantem LCK. Q.E.I.



At si corpus idem de loco A secundum lineam ipsi AK perpendicularem egrederetur, sumenda esset OB seu a ad contrarias partes centri O, & propterea signum ejus mutandum esset, & scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem (hoc est quæ motus corporum accelerat) Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non potest ut corpus ascendendo ab A describat circuli quadrantem AL. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $ALCK$ Parabola, axem habens OL horizonti AK perpendicularem, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut projectile in ipsa moveatur.

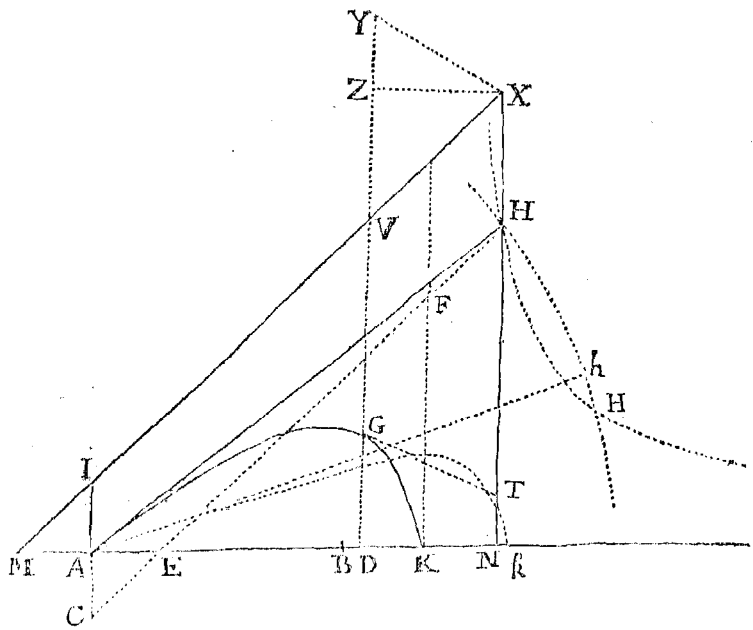
Ex natura Parabolæ, rectangulum ADK æquale est rectangulo sub ordinata DG & recta aliqua data: hoc est, si dicantur recta illa b, AB a, AK c, BC e & BD o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo b in DG, adeoq; DG æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, & ejus coefficiens $\frac{c-2a}{b}$ pro Q; tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo, & ejus coefficiens $\frac{1}{b}$ pro R. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti termini So^3 coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. Q. E. I.

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG pro-

ductæ

ductæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo $DNXZ$, dicatur BN a, BD o, NX c, & ratio data VZ ad ZX



vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX - VZ - VG$ æqualis $c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Qo, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumq; coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt,

 in

in Regula superiore, pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas

ut $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1-\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ seu $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id

est, si in VZ sumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namq; aa & $\frac{mm}{nn}$

$aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad Gravitatem quam habet XY ad YG, & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem G diametrum DG & latus rectum $\frac{YX\ quad.}{VG}$ habente.

Ponatur itaq; quod Medii densitates in locis singulis G sint reciproce ut distantiæ XY, quodq; resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut XY ad YG; & corpus de loco A justa cum velocitate emissum describet Hyperbolam illam AGK. Q.E.I.

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola sit, centro X Asymptotis MX, NX ea lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet Hyperbolam in G & Asymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua ND^n, cujus index est numerus n: & quæratur Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro DN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitq; VZ ad ZX vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A-O$, $VG=\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ=\frac{d}{e}$ in $\overline{A-O}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbbO}{A^{n+1}}+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+$

+

$+\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $\frac{S}{R\times\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoq; ſi in VZ capiatur VY æqualis $n\times VG$, eſt reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}$ in $A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad Gravitatem ut S in $\frac{XY}{A}$ ad $2RR$, id eſt XY ad $\frac{3nn+3n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & Latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Quoniam motus non fit in Parabola niſi in Medio non reſiſtente, in Hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod linea, quam Projectile in Medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad Hyperbolas haſce quam ad Parabolam. Eſt utiq; linea illa Hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab Aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non

eſt

eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & ex natura harum Hyperbolarum facile colligitur quod recta GT tangit Hyperbolam in G, ideoq; denſitas Medii in G eſt reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq.}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{3nn+3n}{n+2}\,GV$.

Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat Hyperbolam AGK, & AH producta occurrat Aſymptoto NX in H, actaq; AI occurrat alteri Aſymptoto MX in I: erit Medii denſitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq.}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad Gravitatem ut AH ad $\frac{3nn+3n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes Regulæ.

Reg. 1. Si ſervetur Medii denſitas in A & mutetur angulus NAH, manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoq; ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus NAH tum Medii denſitas in A, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus NAH quam corporis velocitas in A, gravitaſq; acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio AH ad AI in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eiq; proportionali longitudine $\frac{AHq.}{AI}$; & propterea minuetur AH in eadem ratione, & AI minuetur in ratione illa duplicaplicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine ſit minor, vel Medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

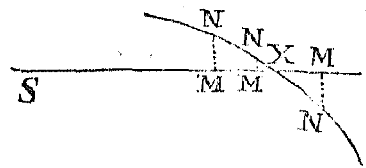
Reg. 4. Quoniam denſitas Medii prope verticem Hyperbolæ minor eſt quam in loco *A*, ut ſervetur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad Tangentem *AH* inveniri, & denſitas in *A*, per Regulam tertiam, diminui in ratione paulo minore quam ſemiſummæ Tangentium ad Tangentem *AH*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribenda ſit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit *HX* æqualis facto ſub $n+1$ & *AI*; centroq; *X* & Aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur Hyperbola, ea lege ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

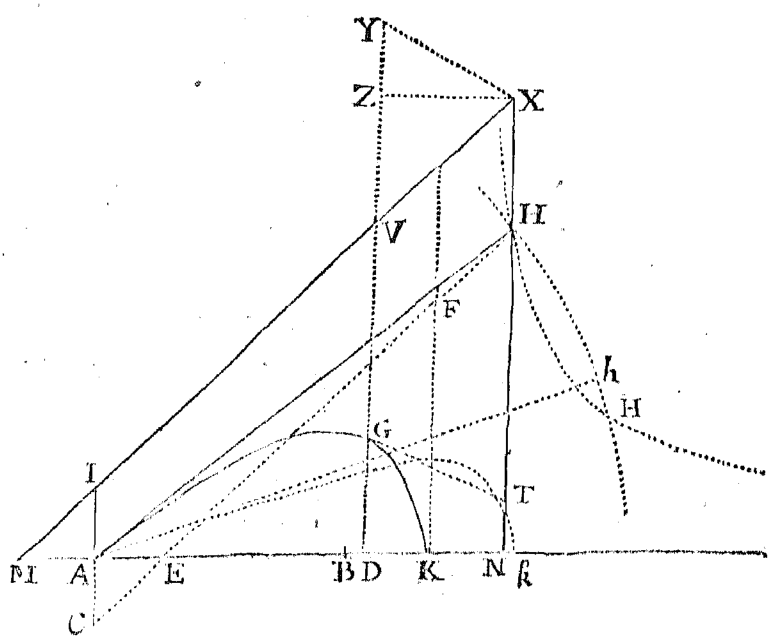
Reg. 6. Quo major eſt numerus *n*, eo magis accuratæ ſunt hæ Hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad *G*; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, eſtq; cæteris ſimplicior. Igitur ſi Hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænominis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAK*, incidentq; in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunq; longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale

quale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH invenienda sunt plura puncta N: & tum demum si per omnia agatur Curva linea regularis $NNXN$, hæc abscindet SX quæsitæ longitudini AH æqualem. Ad usus Mechanicos sufficit longitudines AH, AI easdem in angulis omnibus HAK retinere. Sin figura ad inveniendam resistentiam Medij accuratius determinanda sit, corrigendæ sunt semper hæ longitudines per Regulam quartam.

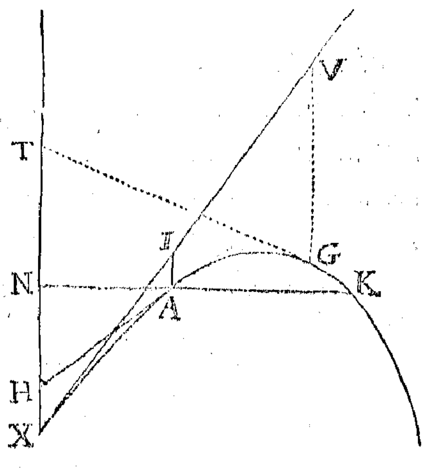


Reg. 8. Inventis longitudinibus AH, HX; si jam desideretur positio rectæ AH, secundum quam Projectile data illa cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorsum tandat, & æquetur ipsi AI seu $\frac{1}{2}HX$. Asymptotis AK, KF describatur Hyperbola, cujus Conjugata transeat per punctum C, centroq; A & intervallo AH describatur Circulus secans Hyperbolam illam in pun-



puncto *H*; & projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *C*, huic in *F*, & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* eſt ad *AE* ut F H ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Aſymptotis *AK*, *KF* deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum *C*, atq adeo reperitur in communi interſectione Hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta *AKN* horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodq; ex duabus interſectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*, quorum minor eligendus eſt; & quod in Praxi mechanica ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis ſit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *HK* ſitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi *XAGK* Parabolam deſignet quam recta *XV* tangat in vertice X, ſintq; ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abſciſſarum *XI*, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur X*T*, T*G*, *HA*, quarum X*T* parallela ſit V*G*, & *TG*, *HA* parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, ſecundum rectam *AH* productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medij, in locis ſingulis *G*, ſit reciproce ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quacum Projectile pergeret,



in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica, verticem *G*, diametrum *VG* deorſum productam, & latus rectum $\sqrt{\frac{2\,TGq.}{nn-n\ \times VG}}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim Gravitatis ut *T* G ad $\frac{3nn-3n}{n-2}$V G. Vnde ſi *NAK* lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medij in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunq; angulus *NAH*; manebunt longitudines *A*H, *AI*, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, & poſitio rectæ X *I*, & ſumendo *V*G ad *IA* ut XV *n* ad X *I* *n*, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile tranſibit.

SECT. III.

De motu corporum quæ reſiſtuntur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.

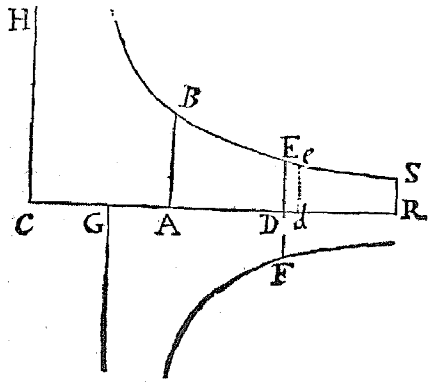
Prop. XI. Theor. VIII.

Si corpus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & ſola vi inſita in Medio ſimilari movetur, ſumantur autem tempora in progreſſione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, data quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometrica.

Centro *C*, Aſymprotis rectangulis *CADd* & *CH* deſcribatur Hyperbola *BEeS*, & Aſymptoto *CH* parallelæ ſint *AB*, *DE*, *de*. In Aſymptoto *CD* dentur puncta *A*, G: Et ſi tempus exponatur per aream Hyperbolicam *ABED* uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem *DF*, cujus reciproca G*D* una cum data *C* G componat longitudinem *CD* in progreſſione Geometrica creſcentem.

Sit

Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit Dd reciproce ut DE, adeoque directe ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) est $\frac{Dd}{GDq.}$, erit ut $\frac{CD}{GDq.}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq.}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq.}$ Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq.}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq.}$ est ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis quantitate data CG augeatur, summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur si datis punctis A, G, exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis

vis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

Prop. XII. Theor. IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.

In Asymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD*, in Progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium *RSED* augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum spatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum est ipsius *GD*, erit reciproce ut *ED*, adeoq; directe ut *CD*, hoc est ut summa ejusdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula *DdeE* describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ G*D*, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim; & propter analoga decrementa, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea G*D*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem G*D*, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum *R*, invenietur punctum G, capiendo G*D* ad G*R* ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis *ABED* descriptum. Invento autem puncto G, datur spatium ex data velocitate, & contra.

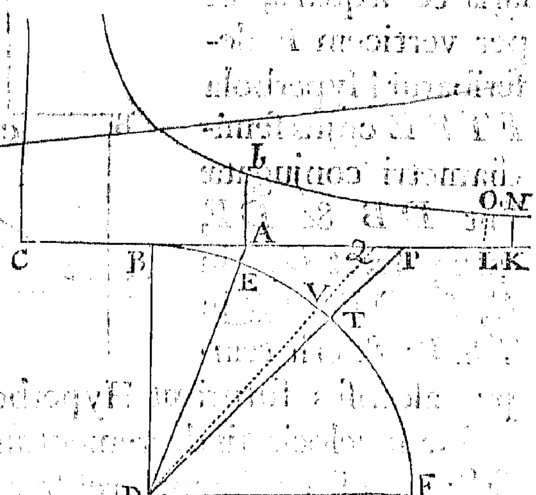
Corol. 3.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI. detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

Prop. XIII. Theor. X.

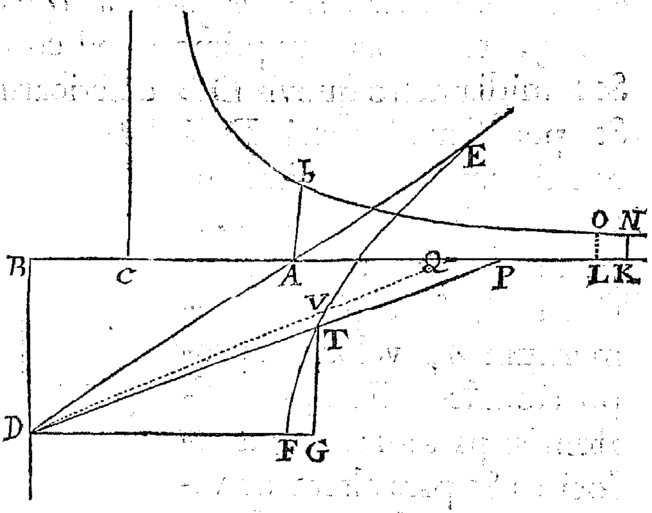
Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod si Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis D*B* describatur circuli quadrans *BETF*, & per semidiametri D*B* terminum *B* agatur infinita *BAP*, semidiametro D*F* parallela. In ea detur punctum *A*, & capiatur segmentum *AP* velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, sit resistentia tota in *P* ut *AP* *quad.* + 2 *PAB*. Jungantur D*A*, D*P*, circulum secantes in *E* ac *T*, & exponatur gravitas per D*A* quadratum, ita ut sit gravitas ad resistentiam in *P* ut D*A q.* ad *AP q.* + 2 *PAB*: & tempus ascensus omnis futuri erit ut circuli sector *EDTE*.



Agatur enim *DVQ*, abscindens & velocitatis *AP* momentum *PQ*, & Sectoris *DET* momentum *DTV* dato temporis momento to reſpondens: & velocitatis decrementum illud PQ erit ut ſumma virium gravitatis $DBq.$ & reſiſtentiæ $APq. + 2BAP$, id eſt (per *Prop.* 12. *Lib.* II. Elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad*; & area DTV, (quæ eſt ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$) eſt ut datum $DTq.$ Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſus futuri proportionalis eſt. *Q. E. D.*

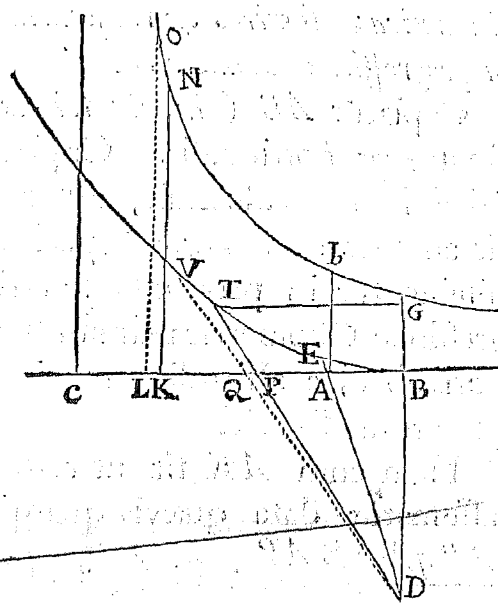
Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq. + 2BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per $DAq.$ exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit $ABq. - BDq.$ gravitati proportionale, ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur Hyperbola $FTVE$ cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæq; ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſus futuri ut Hyperbolæ ſector TDE.



Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq. + 2ABP$ & gravitatis $ABq. - BDq.$ id eſt ut $BPq. - BDq.$ Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$ adeoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut $GTq.$ ſeu $GDq - DFq.$ ad $BDq.$ utque $GDq.$ ad $PBq.$ & diviſim ut $DFq.$ ad $BPq. - DBq.$ Quare cum area DPQ ſit ut PQ, id eſt ut $BPq. - BDq.$ erit area DTV ut datum $DFq.$ Decreſcit igitur area EDT uniformiter

miter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq. + 2ABP$ reſiſtentia, & $DBq. - ABq.$ vis gravitatis, exiſtente angulo DAB recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur Hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit Hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus deſcenſus.



Nam velocitatis incrementum PQ, eiq; proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt ut $DBq. - ABq. - 2ABP - APq.$ ſeu $DBq. - BPq.$ Et area DTV eſt ad aream DPQ ut $DTq.$ ad $DPq.$ adeoq; ut $GTq.$ ſeu $GDq. - BDq.$ ad $BPq.$ utque $GDq.$ ad $BDq.$ & diviſim ut $BDq.$ ad $BDq. - BPq.$ Quare cum area DPQ ſit ut $BDq. - BPq.$ erit area DTV ut datum $BDq.$ Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP eſt ad velocitatem quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris centro D, radio DA, angulo ADT deſcripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas in Medio non reſiſtente, tempori atque adeo Sectori huic proportionalis eſt; in Medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in Medio utroq; ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more Sectoris & Trianguli.

Prop. XIV.

Prop. XIV. Prob. IV.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut summa vel differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.

Capiatur AC (*in Fig. tribus ultimis,*) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus ascendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ sit ad DB ut $DBq.$ ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires CK in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est ut $APq. + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq. + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lem. II.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PB}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq. + BDq.$ existente BET circulo, (*in Fig. Cas.* 1. *Prop.* XIII.) linea AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq. + BDq.}{Z}$, & $DPq.$ seu $APq. + 2BAP + ABq. + BDq.$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$: ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut $DTq.$ vel $DBq.$ ad $CK \times Z$.

Cas. 2.

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq$. linea AC (*Fig. Caſ.* 2. *Prop.* XIII.) erit $\frac{ABq. - BDq.}{Z}$ & DTq. erit ad DPq. ut DFq. ſeu DBq. ad $BPq - BDq$. ſeu $APq: + 2BAP + ABq - BDq$. id eſt ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq. ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq. - ABq$. & linea AC (*Fig. Caſ.* 3. *Prop. præced.*) æquetur $\frac{BDq. - ABq.}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut DBq. ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione; ſi pro area DTV, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt $\frac{1}{2} BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut CK in Z ad BDq. Atq; inde fit PQ in BD *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas AP, id eſt ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia, & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur ſi longitudo aliqua V ſumatur in ea ratione ad arcum ET, quam habet linea DA ad lineam DE; ſpatium quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in Medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium quod in Medio non reſiſtente eodem tem-

 pore

pore describere posset, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in Medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2, & ob datas BD & AB, ut $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Tempus autem est ut DET seu $\frac{1}{2} BD \times ET$, & harum arearum momenta sunt ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ ductum in momentum ipsius V & $\frac{1}{2} BD$ ductum in momentum ipsius ET, id est, ut $\frac{BD \times V}{2AB}$ in $\frac{DAq. \times 2m}{DEq.}$ & $\frac{1}{2} BD \times 2m$, sive ut $\frac{BD \times V \times DAq. \times m}{AB \times DEq.}$ & $BD \times m$. Et propterea momentum areæ V^2 est ad momentum differentiæ arearum DET & $AKNb$, ut $\frac{BD \times V \times DA \times m}{AB \times DE}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ sive ut $\frac{V \times DA}{DE}$ ad AP; adeoque, ubi V & AP quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur est area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum DET & $AKNb$. Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc sunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia; ob eorum analoga incrementa necesse est ut in æqualibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AKNb$ differentia. Q. E. D.

SECT. IV.

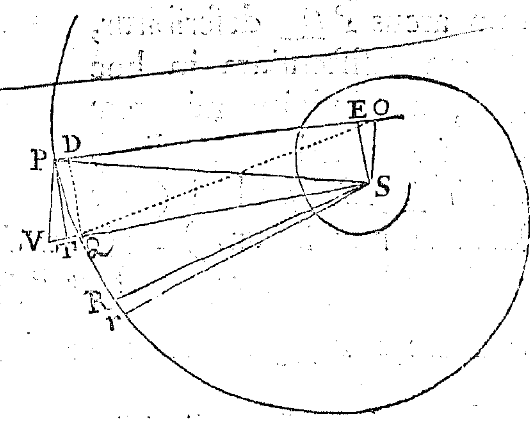
S E C T. IV.

De Corporum circulari Motu in Mediis resistentibus.

L E M. III.

Sit P Q R r *Spiralis quæ secet radios omnes* S P, S Q, S R, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* P T *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* S Q *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod si puncta P & Q accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* T Q x P S *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *O P Q*, *O Q R* subducantur anguli æquales *S P Q*, *S Q R*, & manebunt anguli æquales *O P S*, *O Q S*. Ergo circulus qui transit per puncta *O*, *S*, *P* transibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *P Q* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter secabit rectam *O P*. Fiet igitur *O P* diameter circuli hujus, & angulus *O S P* in semicirculo rectus. Q. E. *D.*



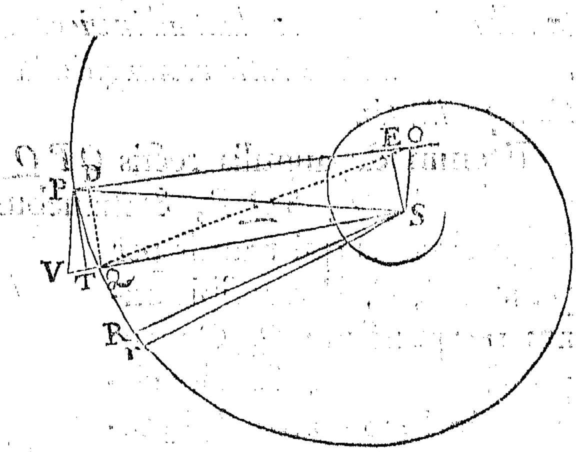
Ad *O P* demittantur perpendicula *Q D*, *S E*, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *T Q* ad *P D* ut *T S* vel *P S* ad *P E*, seu *P O* ad *P S*. Item *P D* ad *P Q* ut *P Q* ad *P O*. Et ex æquo perturbate *T Q* ad *P Q* ut *P Q* ad *P S*. Unde fit *P Q q.* æqualis *T Q* x *P S*. Q. E. *D.*

 Prop. XV.

Prop. XV. Theor. XI.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V, ut ſit SV æqualis SP. Temporibus æqualibus deſcribat corpus arcus quam minimos PQ & QR, ſintque areæ PSQ, QSr æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P eſt reciproce ut SPq. & (per Lem. X. Lib. I.) lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur, (Nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo) erit $TQ \times SPq$. id eſt (per Lemma noviſſimum) $PQq. \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$, & corporis velocitas qua arcus PQ illo tempore deſcribitur ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt in dimidiata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento velocitas, qua arcus QR deſcribitur, eſt in dimidiata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt in dimidiata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus



PQ

PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - SP^{\frac{1}{2}} \times SQ^{\frac{1}{2}}$, seu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - SP^{\frac{1}{2}} \times SQ^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ fit æqualitatis. In Medio non resistente areæ æquales PSQ, QSr (per Theor. I. Lib. I.) temporibus æqualibus describi deberent. Ex resistentia oritur arearum differentia RSr, & propterea resistentia est ut lineolæ Qr decrementum Rr collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola Rr (per Lem. X. Lib. I.) est in duplicata ratione temporis. Est igitur resistentia ut $\frac{Rr}{PQq. \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq. \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq.}$ Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt; & ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq.}$ ut resistentia, id est in ratione densitatis Medii ~~in P &~~ ratione duplicata velocitatis ~~conjunctim~~. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, densitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP, corpus gyrari potest in hac Spirali. Q. E. *D*.

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam SP.

Corol 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin

ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt ut lineæ Rr & TQ ſeu ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{PQq.}{SP}$ quas ſimul generant, hoc eſt ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Data igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & viceverſa ex data illa proportione datur Spiralis.

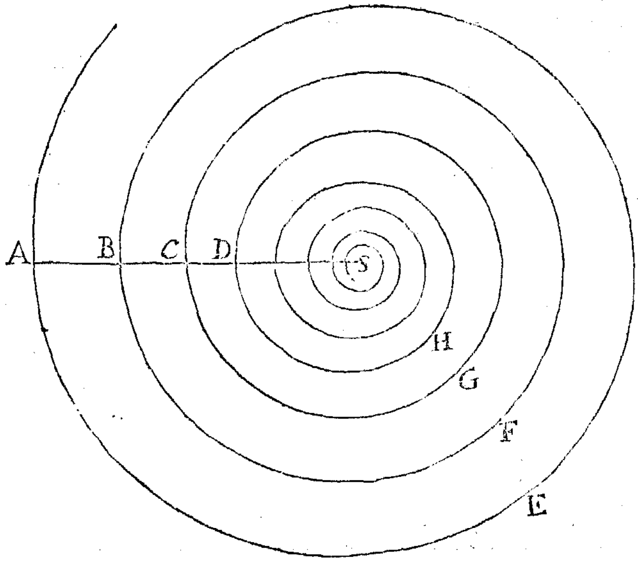
Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, dimidia ſemper cum velocitate qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri. Unde tempora deſcenſus hic erunt dupla majora temporibus illis atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR atque in recta SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſus in Spirali erit ad tempus deſcenſus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus datis deſcribantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut Tangens anguli quem Spiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt reciproce ut Medii denſitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque AEB circa

circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo ſecuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reciproce in dimidiata ratione diſtantiarum a centro (id eſt ut BS ad mediam proportionalem inter AS & CS:) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet Radium AS in partes AS, BS, CS, DS &c. continue proportionales.



Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverſe; id eſt ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atq; tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ ut ſumma omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, & quam proxime ut $\frac{2}{3}AS$ ad AB. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præterpropter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S intervallis continue proportionalibus SA, SB, SC &c. deſcribe circulos

culos quotcunque, & statue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, esse ad numerum revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime; Sed & in eadem quoq; ratione esse Tangentem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, sécat radium *AS*, ad tangentem anguli quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atq; etiam ut sunt eorundem angulorum secantes ita esse tempora revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones eisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut dignitas aliqua distantiæ locorum a centro, sitque vis centripeta reciproce ut distantia in dignitatem illam ducta: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$

&

& resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQq. \times SP^n}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}nVQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, adeoque ut $\frac{\frac{1}{2}nOS}{OP \times SP^{n+1}}$. Et propterea densitas in P est reciproce ut SP^n.

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

Prop. XVII. Prob. V.

Invenire & vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in data Spirali data lege revolvi potest. Vide Fig. Prop. XV.

Sit spiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas Medii.

Prop. XVIII. Prob. VI.

Data lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam Spiralem describet.

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detenere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECT. V.

De Densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile movetur inter se.

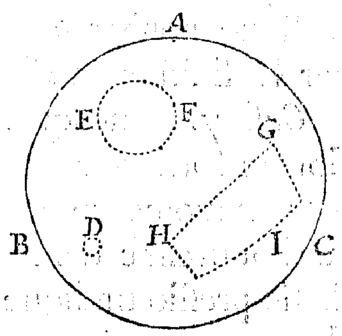
Prop. XIX. Theor. XIII.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita Condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase sphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes ejusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atq; hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere

nisi

nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunq; quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q.E.D.*



Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique: sit enim *EF* pars sphærica fluidi, & si hæc undiq; non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usq; dum ipsa undiq; prematur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per casum eundum primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico præterea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed & per Casum secundum, undiq; premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubiq; premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus Sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem Tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *G H I* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque *G H I*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idq; in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem in momento temporis absque motu locali; & subinde, partes fluidi per Casum quintum, se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt nisi, quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

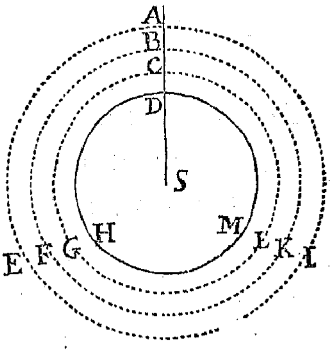
Prop. XX. Theor. XIV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus Cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.

Sit *D H M* superficies fundi, & *A E I* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *B F K*, *C G L* distinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *A E* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies

secunda

ſecunda *BFK* (per Prop. XIX.) premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hac preſſione & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *CGL*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus Orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc eſt gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (ſi modo Orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet Propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi Fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in Propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem Theorematis hujus ad Caſus ſingulos Fluidorum.

Corol. 3.

Corol. 3. Eadem Demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe, ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si Sphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idq; ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc; ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui, per Caſ. 5. Prop. XIX. jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam Fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis

ſuis:

ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, Vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum Caſuum Demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

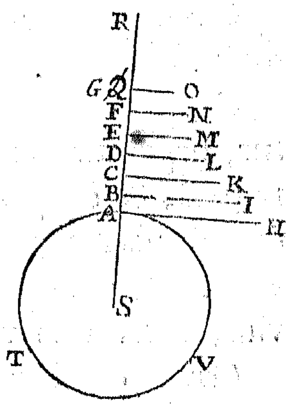
Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunq; vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum Figuras externas, patet inſuper, per Corollaria Prop. XIX. quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe; proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu tu partium oriatur; nec lædent corporibus immerſis, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

Prop. XXI. Theor. XV.

Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.

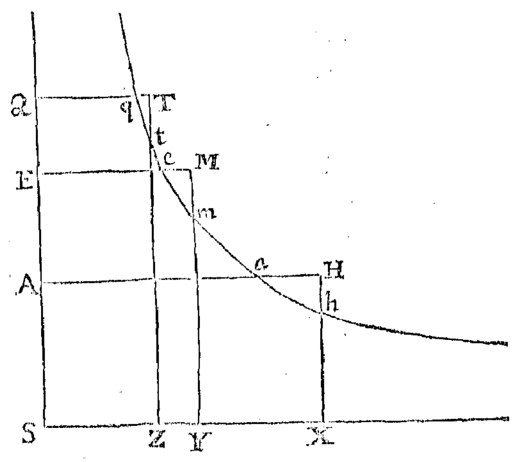
Deſignet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, &c. diſtantias continue proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$ &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, quibus fundum ATV (juxta Theorema XIV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps:



adeoque

adeoque particulæ primæ A densitas AH est ad particulæ secundæ B densitatem BI ut summa omnium $AH+BI+CK+DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI+CK+DL$, &c. Et BI densitas secundæ B, est ad CK densitatem tertiæ C, ut summa omnium $BI+CK+DL$, &c. ad summam omnium $CK+DL$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales per hujus Lem. I. proindeq; differentiæ AH, BI, CK, &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis A, B, C sint ut AH, BI, CK, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & (ex æquo) in distantiis SA, SC, SE continue proportionalibus, erunt densitates AH, CK, EM continue proportionales. Et eodem argumento in distantiis quibusvis continue proportionalibus SA, SD, SQ densitates AH, DL, GO erunt continue proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summitatem Fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continue proportionalibus SA, SD, SQ, densitates AH, DL, GO ~~QT~~, semper existentes ~~continue proportionales~~, manebunt etiamnum continue proportionales. $Q.E.D.$

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q. Centro S, Asymptotis rectangulis SQ, SX describatur Hyperbola secans perpendicula AH, EM, QT in a, e, q, ut & perpendicula HX, MY, TZ ad asymptoton SX demissa in h, m, & t. Fiat area $ZYmtZ$ ad aream datam $YmhX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EeaA$; & linea Zt producta abscindet lineam QT densitati proportionalem. Namque si lineæ SA, SE, SQ sunt continue proportionales, erunt



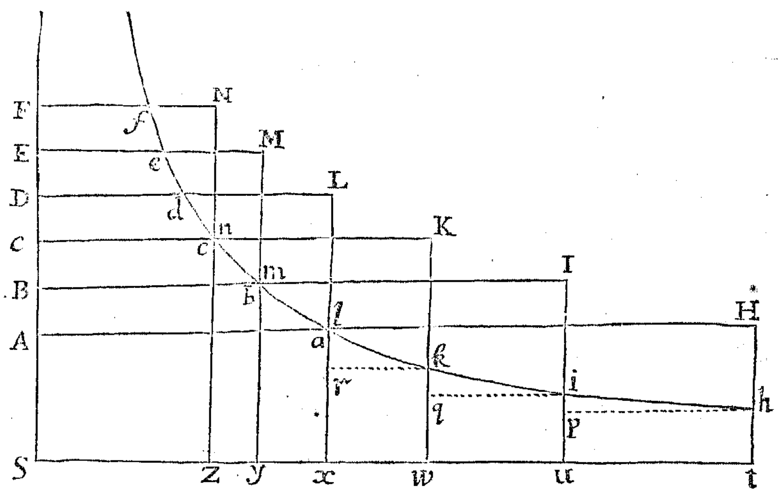
 areæ

arcæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $YmtZ$, $XbmY$ etiam æquales & lineæ SX, SY, SZ id est AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

Prop. XXII. Theor. XVI.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod si distantiæ sumantur in progressione Musica, densitates Fluidi in his distantiis erunt in progressione Geometrica.

Designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in Progressione Geometrica. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ sint ut Fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipsius gravitates specicæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq.}$, $\frac{BI}{SBq.}$, $\frac{CK}{SCq.}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes



ponentes

ponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S Asymptotis SA, SX describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c; ut & perpendicula ad Asymptoton SX demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq. &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est ut Aa, Bb &c. Est enim ex natura Hyperbolæ SA ad AH vel St, ut th ad Aa, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æqualis Bb, &c. Sunt autem Aa Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $zthn$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur jam distantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in Progressione Musica, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est AH, DL, FN, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta AH & CK, dabitur area $tbkw$ harum differentiæ tw respondens; & inde invenietur densitas FN in altitudine quacunque SF, sumendo aream $tbnz$ ad aream illam datam $tbkw$ ut est differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

Scholium

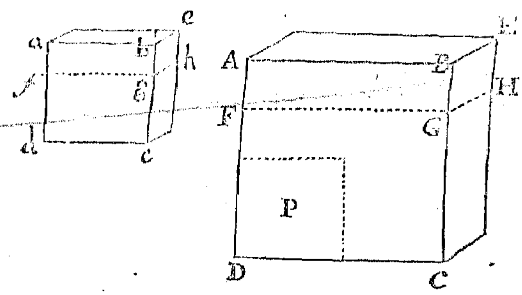
Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SA\,q.}$, $\frac{SA\,cub.}{SB\,q.}$, $\frac{SA\,cub.}{SC\,q.}$) sumantur in progressione Arithmetica; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SA\,qq.}{SA\,cub.}$, $\frac{SA\,qq.}{SB\,cub.}$, $\frac{SA\,qq.}{SC\,cub.}$, &c.) sumantur in progressione Arithmetica; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ, densitas erit reciproce in sesqui-

sesquiplicata ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

Prop. XXIII. Theor. XVII.

Particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis. Et vice versa, si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico *ACE*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*; & particularum similem situm inter se in utroque spatio obtinentium distantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum *DP* urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum inclusum, ut Medii densitates ad invicem, hoc est *ab cub.* ad *AB cub.* Sed pressio qua quadratum *DB* urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc est ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo ex æquo pressio qua latus *DB* urget Fluidum, est ad pressionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh* per media cuborum ductis distinguatur Fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem



viribus

viribus, quibus premuntur a planis AC, ac, hoc eſt in proportione ab ad AB: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemq; ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana FGH, fgh exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum fgh in cubo minore ut ab ad AB, hoc eſt reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt reciproce ut cuborum latera AB, ab; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum DB, db ut ſummæ virium; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris db ut *ab cub.* ad *AB cub.* id eſt vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas qualibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica Dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum

rum

rum Virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam nisi forte per particulas intermedias virtute illa auctas exerceant, ex hujusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particulæ cujusq; virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. Ut si particula unaquæq; vi sua, quæ sit reciproce ut distantia locorum a centro suo, fugat alias omnes particulas in infinitum; Vires quibus Fluidum in vasis similibus æqualiter comprimi & condensari possit, erunt ut quadrata diametrorum vasorum: ideoque vis, qua Fluidum in eodem vase comprimitur, erit reciproce ut latus cubicum quadrato-cubi densitatis. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematice demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

S E C T. VI.

De Motu & resistentia Corporum Funependulorum.

Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse.

Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

Corol. 6. Sed & in Medio non resistente quantitas Materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicui; adeoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

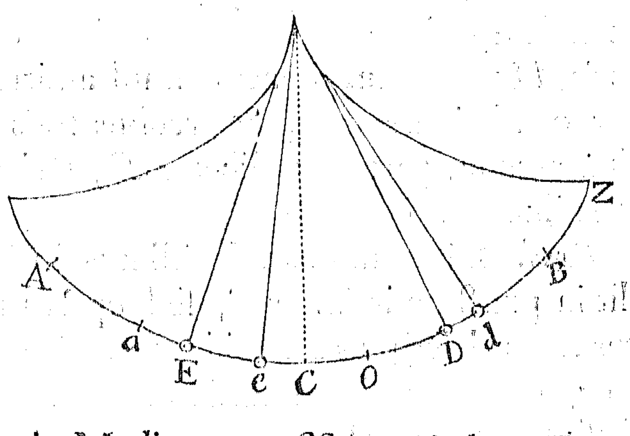
Corol. 7.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis, tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

Prop. XXV. Theor. XIX.

Corpora Funependula quæ in Medio quovis resistuntur in ratione momentorum temporis, quæque in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit *A B* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in *C*, ita ut *C* sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *C D* vel *C d* vel *C E.* Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem *C O*, & sumatur arcus *O d* in ratione ad arcum *C D* quam habet arcus *O B* ad arcum *C B*: & vis qua corpus in *d* urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis *C d* supra resistentiam *C O*, exponetur per arcum *O d*, adeoque erit ad



vim qua corpus *D* urgetur in Medio non resistente, in loco *D*, ut arcus *O d* ad arcum *C D*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *O B* ad arcum *C B*. Proinde si corpora duo, *D*, *d* exeant de loco

B, &

B, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus CB & OB, erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunto arcus illi BD & Bd, & arcus reliqui CD, Od erunt in eadem ratione. Proinde vires ipsis CD, Od proportionales manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Od semper erunt ut arcus toti CD, OB, & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo D, d simul pervenient ad loca C & O, alterum quidem in Medio non resistente ad locum C, & alterum in Medio resistente ad locum O. Cum autem velocitates in C & O sint ut arcus CB & OB; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunto illi CE & Oe. Vis qua corpus D in Medio non resistente retardatur in E est ut CE, & vis qua corpus d in Medio resistente retardatur in e est ut summa vis Ce & resistentiæ CO, id est ut Oe; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus CE, Oe proportionales arcus CB, OB; proindeque velocitates in data illa ratione retardatæ manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum CB & OB; & propterea si sumantur arcus toti AB, aB in eadem ratione, corpora D, d simul describent hos arcus, & in locis A & a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus totis BA, BE proportionales sunt arcuum partes qualibet BD, Bd vel BE, Be quæ simul describuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum C, sed reperitur in puncto illo O, quo arcus totus descriptus aB bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad a, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a B ad O.

Prop. XXVI.

Prop. XXVI. Theor. XX.

Corporum Funependulorum, quæ reſiſtuntur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti: reſiſtentiæ velocitatibus proportionales erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, ~~cōferantur~~ auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. *S*ed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

Prop. XXVII. Theor. XXI.

Si corpora Funependula reſiſtuntur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales *A*, *B*; & reſiſtentia corporis in arcu *A*, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus *B*, in duplicata ratione velocitatum, id eſt ut *A quad.* ad *B quad.* quamproxime. Si reſiſtentia in arcu *B* eſſet ad reſiſtentiam in arcu *A* ut rectangulum *AB* ad *A quad.* tempora in arcubus *A* & *B* forent æqualia per Propositionem superiorem. Ideoque resistentia *A quad.* in arcu *A*, vel *AB* in arcu *B*, efficit excessum temporis in arcu *A* supra tempus in Medio non resistente; & resistentia *BB* efficit excessum temporis in arcu *B* supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes *AB* & *BB* quam proxime, id est ut arcus *A* & *B* *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam si verbi gratia arcus alter sit altero duplo major, differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistentia in descensu corporis qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistentia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corpora tardescentia paulo minus resistuntur pro ratione velocitatis, & corpora accelerata paulo magis quam quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producitur.

Prop. XXVIII. Theor. XXII.

Si corpus Funependulum in Cycloide oscillans resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus

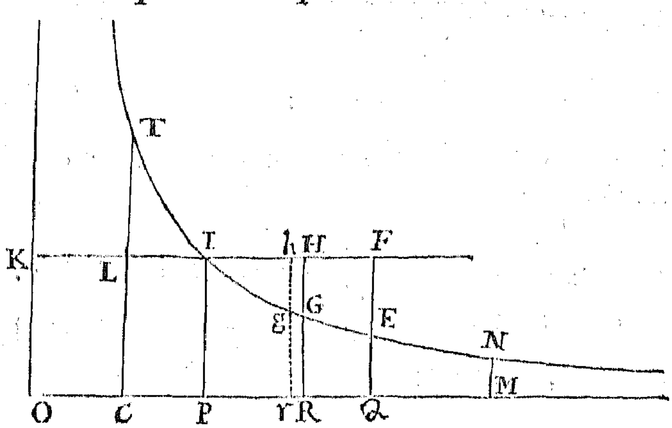
cessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet *BC* arcum descensu descriptum, *Ca* arcum ascensu descriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis *D*, ad vim resistentiæ ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio seu puncto altissimo, id est vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

Prop. XXIX. Prob. VII.

Posito quod corpus in Cycloide oscillans resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit *Ba* (*Fig. Prop. XXV.*) arcus oscillatione integra descriptus, sitque *C* infimum Cycloidis punctum, & *CZ* semissis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O*, *C*, *P*, *Q* ea lege ut (si erigantur perpendicula *OK*, *CT*, *PI*, *QE*, centroque *O* & Asymptotis *OK*, *OQ* describatur Hyperbola *TIGE* secans perpendicula *CT*, *PI*, *QE* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *KF* occurrens Asymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *CT* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area Hyperbolica *PIEQ* ad aream Hyperbolicam



PITC

$PITC$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum Ca ascensu descriptum, & area IEF ad aream ILT ut OQ ad OC. Dein perpendiculo MN abscindatur area Hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum: erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & arcus illi sint ut areæ $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITC$; exponatur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper Dd spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & producatur rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$ contemporanea arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; adeoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$: hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, erit incrementum areæ Y ut $PIGR - Y$.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam arcui describendo CD proportionalem, qua corpus urgetur in D: & R pro resistentia ponatur: erit $V - R$ vis tota qua corpus urgetur in D,

adeoque

adeoque ut incrementum velocitatis in data temporis particula factum. Est autem resistentia R (per Hypothesin) ut quadratum velocitatis, & inde (per Lem. II.) incrementum resistentiæ ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est ut spatium data temporis particula descriptum & $V-R$ conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut $V-R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR-Z$.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR-Y$, & area Z in ratione $PIGR-Z$. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo Ca, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum C, resistentia citius evanescet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus CD, CD arcubus CB & Ca æquantur, adeoque ubi recta RG incidit in rectas QE & CT. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incipit desinitque ubi nulla est, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ}IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta RG incidit in rectam QE & CT. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1.

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ IEF ad aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in dimidiata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide absque omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

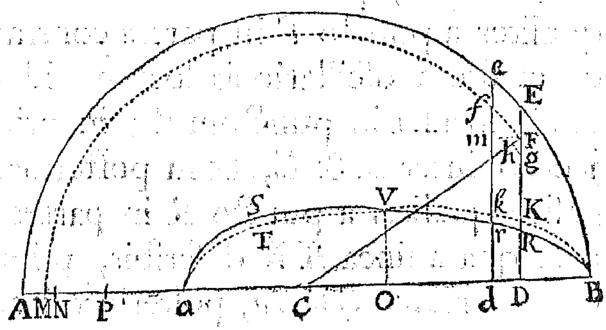
Prop. XXX. Theor. XXIII.

Si recta a B *æqualis sit Cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundam semisummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ, quamproxime.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem aB, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB. Bisecetur AB in C, & punctum C repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit CD ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in D secundum Tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD, & vis gravitatis per longitudinem penduli; & si in DE capiatur DK in ea ratione ad

longi-

longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit DK exponens reſiſtentiæ. Centro C & intervallo CA vel CB conſtruatur ſemicirculus, $BEeA$. Deſcribat autem corpus tempore quam minimo ſpatium Dd, & erectis perpendiculis DE, de circumferentiæ occurrentibus in E & e, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo a puncto B, acquireret in locis D & d. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaq; hæ velocitates per perpendicula illa DE, de; ſitque DF velocitas quam acquirit in D cadendo de B in Medio reſiſtente. Et ſi centro C & intervallo CF deſcribatur circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, erit M locus ad quem deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam ſi Fg deſignet velocitatis momentum quod corpus D, deſcribendo ſpatium quam minimum Dd, ex reſiſtentia Medii amittit, & ſumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & MN erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis DF decrementum fg a reſiſtentia DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum fm a vi CD genitum, ut vis generans DK ad vim generantem CD. Sed & ob ſimilia triangula Fmf, Fhg, FDC, eſt fm ad Fm ſeu Dd, ut CD ad DF, & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fg ad Fh ut CF ad DF; & ex æquo perturbate Fh ſeu MN ad Dd ut DK ad CF. Sumatur DR ad $\frac{1}{2}\,aB$ ut DK ad CF, & erit MN ad Dd ut DR ad $\frac{1}{2}\,aB$; ideoque ſumma omnium $MN \times \frac{1}{2}\,aB$, id eſt $Aa \times \frac{1}{2}\,aB$, æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DR$, id eſt areæ $BRrSa$, quam rectangula omnia $Dd \times DR$



 ſeu

seu $DRrd$ componunt. Bisecentur Aa & aB in P & O, & erit $\frac{1}{2}aB$ seu OB æqualis CP, ideoque DR est ad DK ut CP ad CF vel CM, & divisim KR ad DR ut PM ad CP. Ideoque cum punctum M, ubi corpus versatur in medio oscillationis loco O, incidat circiter in punctum P, & priore oscillationis parte versetur inter A & P, posteriore autem inter P & a, utroque in casu æqualiter a puncto P in partes contrarias errans: punctum K circa medium oscillationis locum, id est e regione puncti O, puta in V, incidet in punctum R; in priore autem oscillationis parte jacebit inter R & E, & in posteriore inter R & D, utroque in casu æqualiter a puncto R in partes contrarias errans. Proinde area quam linea KR describit, priore oscillationis parte jacebit extra aream $BRSa$, posteriore intra eandem, idque dimensionibus hinc inde propemodum æquatis inter se; & propterea in casu priore addita areæ $BRSa$, in posteriore eidem subducta, relinquet aream $BKTa$ areæ $BRSa$ æqualem quam proxime. Ergo rectangulum $Aa \times \frac{1}{2}aB$ seu AaO, cum sit æquale areæ $BRSa$, erit etiam æquale areæ $BKTa$ quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa, colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam si uniformis sit resistentia DK, figura $aBKkT$ rectangulum erit sub Ba & DK, & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æqualis erit rectangulo sub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Propositione XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura $aBKkT$ Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem BA, velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro AB descripti ordinatim applicata DE. Proinde cum Ba in Medio resistente & BA in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates

locitates in ſingulis ipſius Ba punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt Ba ad BA; erit velocitas DK in Medio reſiſtente ut circuli vel Ellipſeos ſuper diametro Ba deſcripti ordinatim applicata; adeoque figura $BKVTa$ Ellipſis, quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit OV exponens reſiſtentiæ in puncto Medio O; & Ellipſis, centro O, ſemiaxibus OB, OV deſcripta, figuram $aBKVT$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quam proxime. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt Aa ad OV ut area ſemicirculi, ad quadratum radii ſive ut 11 and 17 circiter: Et propterea: $\frac{7}{11} Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia DK ſit in duplicata ratione velocitatis, figura $BKTVa$ Parabola erit verticem habens V & axem OV, ideoque æqualis erit duabus tertiis partibus rectanguli ſub Ba & OV quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3} Ba$ & OV, adeoque OV æqualis $\frac{3}{4} Aa$, & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4} Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has concluſiones in rebus practicis abunde ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cum Ellipſis vel Parabola congruat cum figura $BKVTa$ in puncto medio V, hæc ſi ad partem alterutram BKV vel VTa excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & ſic eidem æquabitur quam proxime.

Prop. XXXI. Theor. XXIV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione quamproxime.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per reſiſtentiam Medii, adeoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis reſiſtentia retardans. In ſuperiore Propoſitione rectangulum ſub recta $\frac{1}{2}$ *aB* & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa*, æqualis erat areæ *BKT*. Et area illa, ſi maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc eſt in ratione reſiſtentiæ, adeoque eſt ut longitudo *aB* & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub *Aa* & $\frac{1}{2}$ *aB* eſt ut *aB* & reſiſtentia conjunctim, & propterea *Aa* ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contra.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius; & contra.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius; & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata; & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſive deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ hujus pro longitudine arcus deſcripti, habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

SECT. VII.

SECT. VII.

De Motu Fluidorum & resistentia Projectilium.

Prop. XXXII. Theor. XXV.

Si corporum Systemata duo ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint, singulæ in uno Systemate singulis in altero, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri; & contra.

Corpora similia temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem inceptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur,

gitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent ; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1. 2, & 7. Prop. IV. si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter Systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se, donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum densitates ad invicem ut densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum Systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque Systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque adeo spatia diametris suis proportionalia describere.

Prop. XXX III.

Prop. XXXIII. Theor. XXVI.

Iisdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter eorum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora au-

tem

tem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur ; vires autem motrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe : corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerenter in duplicata ratione velocitatis, projectile reſiſteretur in eadem ratione duplicata accurate ; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis conſtantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in dimidiata ratione virium *T* ad vires *V* ; reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G* in velocitatum ratione duplicata ; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G* ; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqua-

litatem

litatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eadem ratione quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſime moventis eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo Fluidi vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum, ſunt etiam æquivelocium & celerrime moventium corporum reſiſtentiæ in Fluido Elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis Fluidis Elaſticis, ubi velociſſime moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proxime; ſive Fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex Medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Cum autem particulæ Fluidorum, propter vires quibus ſe mutuo fugiunt, moveri nequeant quin ſimul agitent particulas alias in circuitu, atque adeo difficilius moveantur inter ſe quam ſi viribus iſtis deſtituerentur; & quo majores ſint earum vires centrifugæ, eo difficilius moveantur inter se: manifestum esse videtur quod projectile in tali Fluido eo difficilius movebitur, quo vires illæ sunt intensiores; & propterea si corporis velocissimi in superioribus Corollariis velocitas diminuatur, quoniam resistentia diminueretur in duplicata ratione velocitatis, si modo vires particularum in eadem ratione duplicata diminuerentur; vires autem nullatenus diminuantur, manifestum est quod resistentia diminuetur in ratione minore quam duplicata velocitatis.

Corol. 7. Porro cum vires centrifugæ eo nomine ad augendam resistentiam conducant, quod particulæ motus suos per Fluidum ad majorem a se distantiam per vires illas propagent; & cum distantia illa minorem habeat rationem ad majora corpora: manifestum est quod augmentum resistentiæ ex viribus illis oriundum in corporibus majoribus minoris sit momenti; & propterea, quo corpora sint majora eo magis accurate resistentia tardescentium decrescet in in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 8. Unde etiam ratio illa duplicata magis accurate obtinebit in Fluidis quæ, pari densitate & vi Elastica, ex particulis minoribus constant. Nam si corpora illa majora diminuantur, & particulæ Fluidi, manente ejus densitate & vi Elastica, diminuantur in eadem ratione; manebit eadem ratio resistentiæ quæ prius: ut ex præcedentibus facile colligitur.

Corol. 9. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis Elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar Lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in superioribus Corollariis.

Prop. XXXIV. Theor. XXVII.

Quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent ubi particulæ Systematum se mutuo contingunt, si modo particulæ illæ sint summe lubricæ.

Concipe particulas viribus quibusdam se mutuo fugere, & vires illas in accessu ad superficies particularum augeri in infinitum, & contra, in recessu ab iisdem celerrime diminui & statim evanescere. Concipe etiam systemata comprimi, ita ut partes eorum se mutuo contingant, nisi quatenus vires illæ contactum impediunt. Sint autem spatia per quæ vires particularum diffunduntur quam angustissima, ita ut particulæ se mutuo quam proxime contingant: & motus particularum inter se iidem erunt quam proxime ac si se mutuo contingerent. Eadem facilitate labentur inter se ac si essent summe lubricæ, & si impingant in se mutuo reflectentur ab invicem ope virium præfatarum, perinde ac si essent Elasticæ. Itaque motus erunt iidem in utroque casu, nisi quatenus perexigua particularum, sese non contingentium intervalla diversitatem efficiant: quæ quidem diversitas diminuendo particularum intervalla diminui potest in infinitum. Jam vero quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent in particulis sese non contingentibus, idque licet intervalla particularum, diminuendo spatia per quæ vires diffundunur, diminuantur in infinitum. Et propterea eadem obtinent in particulis sese contingentibus, exceptis solum differentiis quæ tandem differentiis quibusvis datis minores evadant. Dico igitur quod accurate obtinent. Si negas, assigna differentiam in casu quocunque. Atqui jam probatum est quod differentia minor sit quam data quævis. Ergo differentia falso assignatur, & propterea nulla est. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si Systematum duorum partes omnes quiescant inter se, exceptis duabus, quæ cæteris majores sint & sibi mutuo correſpondeant inter cæteras ſimiliter ſitæ. Hæ ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projectæ ſimiles excitabunt motus in Syſtematibus, & temporibus proportionalibus pergent ſpatia ſimilia & diametris ſuis proportionalia deſcribere; & reſiſtentur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Syſtematum.

Corol. 2. Unde ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo ſimilia, & eorum partes duæ majores ſint corpora in iiſdem projecta: ſint autem Fluidorum particulæ ſumme lubricæ, & quoad magnitudinem & denſitatem proportionales corporibus: pergent corpora temporibus proportionalibus ſpatia ſimilia & diametris ſuis proportionalia deſcribere, & reſiſtentur in ratione Corollario ſuperiore definita.

Corol. 3. Proinde in eodem Fluido Projectile magnitudine datum reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis.

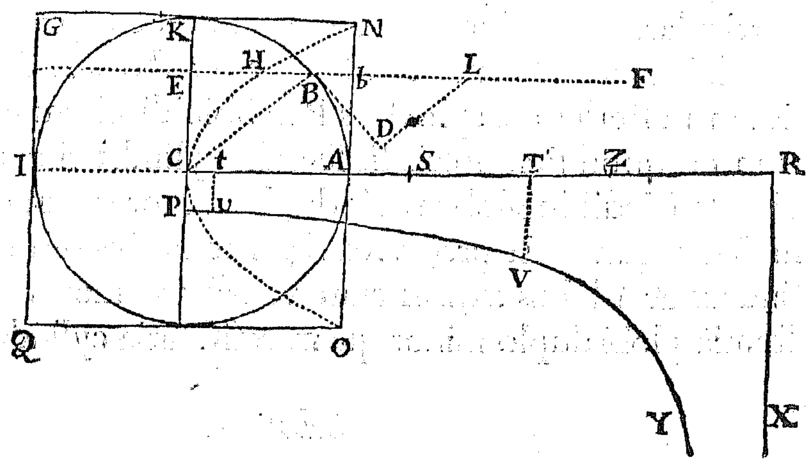
Corol. 4. At ſi particulæ Fluidi non ſint ſumme lubricæ, vel ſi viribus quibuſcunque ſe mutuo agitant, quibus motuum libertas diminuitur: Projectilia tardiora difficilius ſuperabunt reſiſtentiam, & propterea magis reſiſtentur quam in velocitatis ratione duplicata.

Prop. XXXV. Theor. XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in Medio raro & Elaſtico, ſecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate celerrime moveantur: erit reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri.

Nam quoniam reſiſtentia (per Corol. 3. Prop. XXXIII.) eadem eſt quam proxime ac ſi partes Fluidi viribus nullis ſe mutuo fugerent, ſupponamus partes Fluidi ejuſmodi viribus deſtitutas per ſpatia omnia uniformiter diſpergi. Et quoniam actio Medii in corpus eadem eſt (per Legum Corol. 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ eadem cum veloci-

velocitate impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Designet igitur *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, secundum rectas ipsi *AC* parallelas: Sitque *FB* ejusmodi recta.



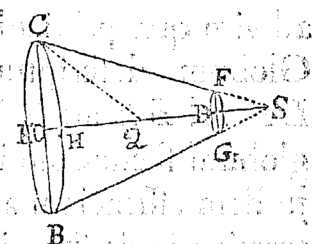
In ea capiatur *LB* semidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ Sphæram tangat in *B*. In *AC* & *BD* demittantur perpendiculares *BE*, *DL*, & vis qua particula Medii, secundum rectam *FB* oblique incidendo, Globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa Globum descriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam *FB* vel *AC*, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundum plagam determinationis suæ, id est secundum plagam rectæ *BC* qua globum directe urget, ut *BE* ad *BC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in globum secundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem secundum plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare si ad cylindri basem circularem *NAO* erigatur perpendiculum *bHE*, & sit *bE* æqualis radio *AC*, & *bH* æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$, erit *bH* ad

bE

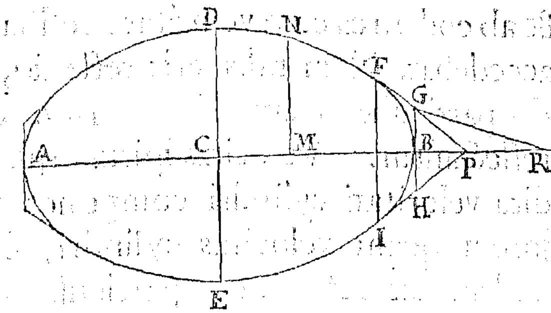
b E ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea Solidum quod a rectis omnibus *b H* occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus *b E* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed solidum prius est Paraboloìs vertice *V*, axe *C A* & latere recto *C A* descriptum, & solidum posterius est cylindrus Paraboloidi circumscriptus: & notum est quod Parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota Medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in Cylindrum. Et propterea si particulæ Medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

Eadem methodo figuræ aliæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in Mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *O C* describitur, & altitudine *O D*, construendum sit frustrum coni *C B G F*, quod omnium eadem basi & altitudine constructorum & secundum plagam axis sui versus *D* progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem *O D* in *Q* & produc *O Q* ad *S* ut sit *Q S* æqualis *Q C*, & erit *S* vertex coni cujus frustum quæritur.



Unde obiter cum angulus *C S B* semper sit acutus, consequens est, quod si solidum *A D B E* convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis *A D B E* circa axem *A B* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *F G*, *G H*, *H I* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *G H* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *F G*, *H I* cum eadem *G H* contineant angulos *F G B*, *B H I* graduum 135: solidum, quod convolutione figuræ *A D F G H I E* circa axem em eundem CB generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui AB progrediatur, & utriusque terminus B præcedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.



Quod si figura $DNFB$ ejusmodi sit ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & a puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4 BR \times GBq$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta describitur, in Medio raro & Elastico ab A versus B velocissime movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.

Prop. XXXVI. Prob. VIII.

Invenire resistentiam corporis Sphærici in Fluido raro & Elastico velocissime progredientis. (Vide Fig. Pag. 325.)

Designet $ABKI$ corpus Sphæricum centro C semidiametro CA descriptum. Producatur CA primo ad S deinde ad R, ut sit AS pars tertia ipsius CA, & CR sit ad CS ut densitas corporis Sphærici ad densitatem Medii. Ad CR erigantur perpendicula PC, RX, centroque R & Asymptotis CR, RX describatur Hyperbola quævis PVY. In CR capiatur CT longitudinis cujusvis, & erigatur perpendiculum TV abscindens aream Hyperbolicam $PCTV$, & sit CZ latus hujus areæ applicatæ ad rectam PC. Dico quod motus quem globus, describendo spatium CZ, ex resistentia Medii amittet, erit ad ejus motum totum sub initio ut longitudo CT ad longitudinem CR quamproxime.

Nam

Nam (per motuum Legem tertiam) motus quem cylindrus $GNOQ$ circa globum descriptus impingendo in Medii particulas amitteret, æqualis est motui quem imprimeret in easdem particulas. Ponamus quod particulæ singulæ reflectantur a cylindro, & ab eodem ea cum velocitate resiliant, quacum cylindrus ad ipsas accedebat. Nam talis erit reflexio, per Legum Corol. 3. si modo particulæ quam minime sint, & vi Elastica quam maxima reflectantur. Velocitas igitur quacum a cylindro resiliunt, addita velocitati cylindri componet totam velocitatem duplo majorem quam velocitas cylindri, & propterea motus quem cylindrus ex reflexione particulæ cujusque amittit, erit ad motum totum cylindri, ut particula duplicata ad cylindrum. Proinde cum densitas Medii sit ad densitatem cylindri ut CS ad CR; si Ct sit longitudo tempore quam minimo a cylindro descripta, erit motus eo tempore amissus ad motum totum cylindri ut $2\,Ct \times CS$ ad $AI \times CR$. Ea enim est ratio materiæ Medii, a cylindro protrusæ & reflexæ, ad massam cylindri. Unde cum globus sit duæ tertiæ partes cylindri, & resistentia globi (per Propositionem superiorem) sit duplo minor quam resistentia cylindri: erit motus, quem globus describendo longitudinem L amittit, ad motum totum globi, ut $Ct \times CS$ ad $\frac{2}{3}\,AI \times CR$, sive ut Ct ad CR. Erigatur perpendiculum tv Hyperbolæ occurrens in v, & (per Corol. 1. Prop. V. Lib. II) si corpus describendo longitudinem areæ $Ctv P$ proportionalem, amittit motus sui totius CR partem quamvis Ct, idem describendo longitudinem areæ $CTVP$ proportionalem, amittet motus sui partem CT. Sed longitudo Cz æqualis est $\frac{CPvt}{CP}$, & longitudo OZ (per Hypothesin) æqualis est $\frac{CPTV}{CP}$, adeoque longitudo Ct est ad longitudinem CZ ut area $CPvt$ ad aream $CPVT$. Et propterea cum globus describendo longitudinem quam minimam Ct amittat motus sui partem, quæ sit ad totum ut Ct ad CR, is

describendo

describendo longitudinem aliam quamvis CZ, amittet motus sui partem quæ sit ad totum ut CT ad CR. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si detur corporis velocitas sub initio, dabitur tempus quo corpus, describendo spatium Ct, amittet motus sui partem Ct: & inde, dicendo quod resistentia sit ad vim gravitatis ut ista motus pars amissa ad motum, quem gravitas Globi eodem tempore generaret; dabitur proportio resistentiæ ad gravitatem Globi.

Corol. 2. Quoniam in his determinandis supposui quod particulæ Fluidi per vim suam Elasticam quam maxime a Globo reflectantur, & particularum sic reflexarum impetus in Globum duplo major sit quam si non reflecterentur: manifestum est quod in Fluido, cujus particulæ vi omni Elastica aliaque omni vi reflexiva destituuntur, corpus Sphæricum resistentiam duplo minorem patietur; adeoque eandem velocitatis partem amittendo, duplo longius progredietur quam pro constructione Problematis hujus superius allata.

Corol. 3. Et si particularum vis reflexiva neque maxima sit neque omnino nulla, sed mediocrem aliquam rationem teneat: resistentia pariter, inter limites in constructione Problematis & Corollario superiore positos, mediocrem rationem tenebit.

Corol. 4. Cum corpora tarda paulo magis resistantur quam pro ratione duplicata velocitatis: hæc describendo longitudinem quamvis CZ amittent majorem motus sui partem, quam quæ sit ad motum suum totum ut CT ad CR.

Corol. 5. Cognita autem resistentia corporum celerrimorum, innotescet etiam resistentia tardorum; si modo lex decrementi resistentiæ pro ratione velocitatis inveniri potest.

Prop. XXXVII. Prob. IX.

Aquæ de vase dato per foramen effluentis definire motum.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur ut aqua per foramen defluat, manifestum est quod vas sustinebit pondus aquæ totius, dempto pondere partis illius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam si foramen obstaculo aliquo occluderetur, obstaculum sustineret pondus aquæ sibi perpendiculariter incumbentis, & fundum vasis sustineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obstaculo, fundum vasis eadem aquæ pressione eodemve ipsius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obstaculum sustinebat, cum jam non sustineatur, faciet ut aqua descendat & per foramen defluat.

Unde consequens est, quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare possit. Nam aquæ particula unaquæque pondere suo, quatenus non impeditur, descendit, idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur, urgebit obstaculum. Obstaculum illud vel vasis est fundum, vel aqua inferior defluens; & propterea ponderis pars illa, quam vasis fundum non sustinet, urgebit aquam defluentem & motum sibi proportionalem generabit.

Designet igitur F aream foraminis, A altitudinem aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, P pondus ejus; AF quantitatem ejus, S spatium quod dato quovis tempore T in vacuo libere cadendo describeret, & V velocitatem quam in fine temporis illius cadendo acquisiverit: & motus ejus acquisitus $AF \times V$ æqualis erit motui aquæ totius eodem tempore effluentis. Sit velocitas quacum effluendo exit de foramine, ad velocitatem V ut d ad e; & cum aqua velocitate V describere posset spatium $2S$, aqua effluens eodem tempore, velocitate sua $\frac{d}{e}V$, describere posset spatium $\frac{2d}{e}S$. Et propterea columna aquæ cujus longitudo sit

sit $\frac{2d}{e}S$ & latitudo eadem quæ foraminis, posset eo tempore defluendo egredi de vase, hoc est columna $\frac{2d}{e}SF$. Quare motus $\frac{2dd}{ee}SFV$, qui fiet ducendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem suam, hoc est motus omnis tempore effluxus illius genitus, æquabitur motui $AF \times V$. Et si æquales illi motus applicenter ad FV; fiet $\frac{2dd}{ee}S$ æqualis A. Unde est dd ad ee ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione $\frac{1}{2}A$ ad S. Est igitur velocitas quacum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo describens spatium S acquireret, ut altitudo aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & spatium illud S, quod corpus tempore T cadendo describeret.

Igitur si motus illi sursum vertantur; quoniam aqua velocitate V ascenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat; & altitudines (uti notum est) sint in duplicata ratione velocitatum: aqua effluens ascenderet ad altitudinem $\frac{1}{2}A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis, quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem $\frac{1}{2}A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini perpendiculariter imminentis.

Cum autem aqua effluens, motu suo sursum verso, perpendiculariter surgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis; consequens est quod si egrediatur oblique per canalem in latus vasis, describet in spatiis non resistentibus Parabolam cujus latus rectum est altitudo aquæ in vase supra canalis orificium, & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinatim applicatæ parallelæ sunt axi canalis.

Hæc omnia de Fluido subtilissimo intelligenda sunt. Nam si aqua ex partibus crassioribus constet, hæc tardius effluet quam pro ratione superius assignata, præsertim si foramen angustum sit per quod effluit.

Denique si aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur; quoniam fundum vasis integrum est, & eadem aquæ incumbentis pressione ubique urgetur ac si aqua non efflueret; vas sustinebit pondus aquæ totius, non obstante effluxu, sed latus vasis de quo effluit non sustinebit pressionem illam omnem, quam sustineret si aqua non efflueret. Tolletur enim pressio partis illius ubi perforatur: quæ quidem pressio æqualis est ponderi columnæ aquæ, cujus basis foramini æquatur & altitudo eadem est quæ aquæ totius supra foramen. Et propterea si vas, ad modum corporis penduli, filo prælongo a clavo suspendatur, hoc, si aqua in plagam quamvis secundum lineam horizontalem effluit, recedet semper a perpendiculo in plagam contrariam. Et par est ratio motus pilarum, quæ Pulvere tormentario madefacto implentur, &, materia in flammam per foramen paulatim expirante, recedunt a regione flammæ & in partem contrariam cum impetu feruntur.

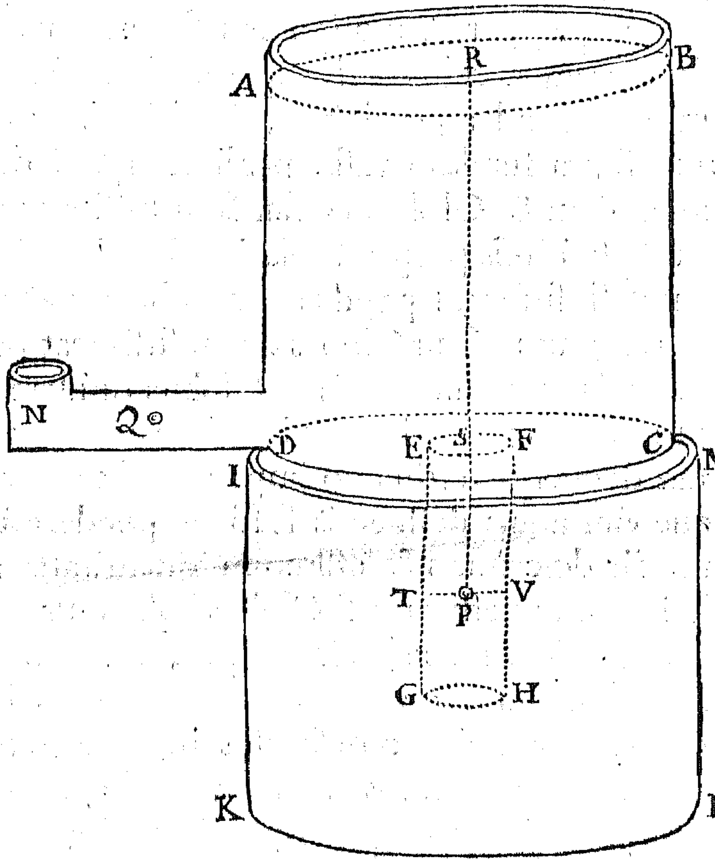
Prop. XXXVIII. Theor. XXIX.

Corporum Sphæricorum in Mediis quibusque Fluidissimis resistentiam in anteriore superficie definire.

Defluat aqua de vase Cylindrico $ABCD$, per canalem Cylindricum $EFGH$, in vas inferius $IKLM$; & inde effluat per vasis marginem IM. Sit autem margo ille ejusdem altitudinis cum vasis superioris fundo CD, eo ut aqua per totum canalem uniformi cum motu descendat; & in medio canalis collocetur Globus P, sitque PR altitudo aquæ supra Globum, & SR ejusdem altitudo supra fundum vasis. Sustineatur autem Globus filo tenuissimo TV, lateribus canalis hinc inde affixo. Et manifestum est per proportionem superiorem, quod quantitas aquæ dato tempore defluentis erit ut amplitudo foraminis per quod defluit; hoc est, si Globus tollatur, ut canalis orificium: sin Globus adsit, ut spatium undique inter Globum & canalem. Nam velocitas aquæ defluentis (per superiorem Propositionem) ea erit

quam

quam corpus cadendo, & casu suo describendo dimidiam aquæ altitudinem *SR*, acquirere posset: adeoque eadem est sive Globus tollatur, sive adsit. Et propterea aqua defluens erit ut amplitudo spatii per quod transit. Certe transitus aquæ per spatium angustius facilior esse nequit quam per spatium amplius, & propterea velocitas ejus ubi Globus adest, non potest esse major quam cum tollitur: ideoque major aquæ quantitas, ubi Globus adest, non effluet quam pro ratione spatii per quod transit. Si aqua non sit liquor subtilissimus & fluidissimus, hujus transitus per spatium angustius, ob crassitudinem particularum, erit aliquanto tardior: at liquorem fluidissimum esse hic supponimus. Igitur quantitas aquæ, cujus descensum Globus dato tempore impedit, est ad quantitatem aquæ quæ, si Globus tolleretur, eodem tempore descenderet, ut basis Cylindri circa Globum descripti ad orificium canalis; sive ut quadratum diametri Globi ad quadratum diametri cavitatis canalis. Et propterea quantitas aquæ cujus descensum Globus impedit, æqualis est quantitati aquæ, quæ eodem tempore



tempore per foramen circulare in fundo vasis, basi Cylindri illius æquale, descendere posset, & cujus descensus per fundi partem quamvis circularem basi illi æqualem impeditur.

Jam vero pondus aquæ, quod vas & Globus conjunctim sustinent, est pondus aquæ totius in vase, præter partem illam quæ aquam defluentem accelerat,& ad ejus motum generandum sufficit, quæque, per Propositionem superiorem, æqualis est ponderi columnæ aquæ cujus basis æquatur spatio inter Globum & canalem per quod aqua defluit, & altitudo eadem cum altitudine aquæ supra fundum vasis, per lineam *S R* designatæ. Vasis igitur fundum & Globus conjunctim sustinent pondus aquæ totius in vase sibi ipsis perpendiculariter imminentis. Unde cum fundum vasis sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminentis, reliquum est ut Globus etiam sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminentis. Globus quidem non sustinet pondus aquæ illius stagnantis & sibi absque omni motu incumbentis, sed aquæ defluenti resistendo impedit effectum tanti ponderis; adeoque vim aquæ defluentis sustinet ponderi illi æqualem. Nam impedit descensum & effluxum quantitatis aquæ quem pondus illud accurate efficeret si Globus tolleretur. Aqua pondere suo, quatenus descensus ejus impeditur, urget obstaculum omne, ideoque obstaculum, quatenus descensum aquæ impedit, vim sustinet æqualem ponderi quo descensus ille efficeretur. Globus autem descensum quantitatis aquæ impedit, quem pondus columnæ aquæ sibi perpendiculariter incumbentis efficere posset; & propterea vim aquæ decurrentis sustinet ponderi illi æqualem. Actio & reactio aquæ per motus Legem tertiam æquantur inter se, & in plagas contrarias diriguntur. Actio Globi in aquam descendentem, ad ejus descensum impediendum, in superiora dirigitur, & est ut descendendi motus impeditus, eique tollendo adæquate sufficit: & propterea actio contraria aquæ in Globum æqualis est vi quæ motum eundem vel tollere vel generare possit,

hoc

hoc est ponderi columnæ aquæ, quæ Globo perpendiculariter imminet & cujus altitudo est *RS*.

Si jam canalis orificium superius obstruatur, sic ut aqua descendere nequeat, Globus quidem, pondere aquæ in canali & vase inferiore *IKLM* stagnantis, premetur undique; sed non obstante pressione illa, si ejusdem sit specificæ gravitatis cum aqua, quiescet. Pressio illa Globum nullam in partem impellet. Et propterea ubi canalis aperitur & aqua de vase superiore descendit, vis omnis, qua Globus impellitur deorsum, orietur ab aquæ illius descensu, atque adeo æqualis erit ponderi columnæ aquæ, cujus altitudo est *RS* & diameter eadem quæ Globi. Pondus autem istud, quo tempore data quælibet aquæ quantitas, per foramen basi Cylindri circa Globum descripti æquale, sublato Globo effluere posset, sufficit ad ejus motum omnem generandum; atque adeo quo tempore aqua in Cylindro uniformiter decurrendo describit duas tertias partes diametri Globi, sufficit ad motum omnem aquæ Globo æqualis generandum. Nam Cylindrus aquæ, latitudine Globi & duabus tertiis partibus altitudinis descriptus, Globo æquatur. Et propterea aquæ currentis *impetus in Globum* quiescentem, quo tempore aqua currendo describit duas tertias partes diametri Globi, si uniformiter continuetur, generaret motum omnem partis Fluidi quæ Globo æquatur.

Quæ vero de aqua in canali demonstrata sunt, intelligenda sunt etiam de aqua quacunque fluente, qua Globus quilibet in ea quiescens urgetur. Quæque de aqua demonstrata sunt obtinent etiam in Fluidis universis subtilissimis. De his omnibus idem valet argumentum.

Jam vero per Legum Corol. 5, vis Fluidi in Globum eadem est, sive Globus quiescat & Fluidum uniformi cum velocitate moveatur, sive Fluidum quiescat & Globus eadem cum velocitate in partem contrariam pergat. Et propterea resistentia Globi in Medio quocunque Fluidissimo uniformiter progredientis, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ describit, æqualis

lis est vi, quæ in corpus ejusdem magnitudinis cum Globo & ejusdem densitatis cum Medio uniformiter impressa, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ progrediendo describit, velocitatem Globi in corpore illo generare posset. Tanta est resistentia Globi in superficiei parte præcedente. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si solidum Sphæricum in ejusdem secum densitatis Fluido subtilissimo libere moveatur, & inter movendum eadem vi urgeatur a tergo atque cum quiescit; ejusdem resistentia ea erit quam in Corollario secundo Propositionis xxxvi. descripsimus. Unde si computus ineatur, patebit quod solidum dimidiam motus sui partem prius amittet, quam progrediendo descripserit longitudinem diametri propriæ; Quod si inter movendum minus urgeatur a tergo, magis retardabitur: & contra, si magis urgeatur, minus retardabitur.

Corol. 2. Hallucinantur igitur qui credunt resistentiam projectilium per infinitam divisionem partium Fluidi in infinitum diminui. Si Fluidum sit valde crassum, minuetur resistentia aliquantulum per divisionem partium ejus. At postquam competentem Fluiditatis gradum acquisiverit, (qualis forte est Fluiditas Aeris vel aquæ vel argenti vivi) resistentia in anteriore superficie solidi, per ulteriorem partium divisionem non multum minuetur. Nunquam enim minor futura est quam pro limite quem in Corollario superiore assignavimus.

Corol. 3. Media igitur in quibus corpora projectilia sine sensibili motus diminutione longissime progrediuntur, non solum Fluidissima sunt, sed etiam longe rariora quam sunt corpora illa quæ in ipsis moventur: nisi forte quis dixerit Medium omne Fluidissimum, impetu perpetuo in posticam projectilis partem facto, tantum promovere motum ejus quantum impedit & resistit in parte antica. Et motus quidem illius, quem projectile imprimit in Medium, partem aliquam a Medio circulariter lato reddi corpori a tergo verisimile est. Nam & experimentis quibusdam factis, reperi quod in Fluidis satis compressis pars aliqua redditur.

Omnem vero in casu quocunque reddi nec rationi consentaneum videtur, neque cum experimentis hactenus a me tentatis bene quadrat. Fluidorum enim utcunque subtilium, si densa sint, vim ad solida movenda resistendaque permagnam esse, & quomodo vis illius quantitas per experimenta determinetur, plenius patebit per Propositiones duas quæ sequuntur.

Lemmma IV.

Si vas Sphæricum Fluido homogeneo quiescente plenum a vi impressa moveatur in directum, motuque progressivo semper accelerato ita pergat ut interea non moveatur in orbem: partes Fluidi inclusi, æqualiter participando motum vasis, quiescent inter se. Idem obtinebit in vase figuræ cujuscunque. Res manifesta est, nec indiget demonstratione.

Prop. XXXIX. Theor. XXX.

Fluidum omne quod motu accelerato ad modum venti increbescentis progreditur, & cujus partes inter se quiescunt, rapit omnia ejusdem densitatis innatantia corpora, & secum cum eadem velocitate defert.

Nam per Lemma superius si vas Sphæricum, rigidum, Fluidoque homogeneo quiescente plenum, motu paulatim impresso progrediatur; Fluidi motum vasis participantis partis omnes semper quiescent inter se. Ergo si Fluidi partes aliquæ congelarentur, pergerent hæ quiescere inter partes reliquas. Nam quoniam partes omnes quiescunt inter se, perinde est sive fluidæ sint, sive aliquæ earum rigescant. Ergo si vas a vi aliqua extrinsecus impressa moveatur, & motum suum imprimat in Fluidum: Fluidum quoque motum suum imprimet in sui ipsius partes congelatas easque secum rapiet. Sed partes illæ congelatæ sunt corpora solida ejusdem densitates cum Fluido; & par est ratio Fluidi, sive id in vase moto claudatur, sive in spatiis liberis ad modum venti

spiret.

ſpiret. Ergo Fluidum omne quod motu progreſſivo accelerato fertur, & cujus partes inter ſe quieſcunt, ſolida quæcunque ejuſdem denſitatis incluſa, quæ ſub initio quieſcebant, rapit ſecum, & una moveri cogit. *Q. E. D.*

Prop. XL. Prob. X.

Invenire reſiſtentiam ſolidorum Sphæricorum in Mediis Fluidiſſimis denſitate datis.

In Fluido quocunque dato inveniatur reſiſtentia ultima ſolidi ſpecie dati, cujus magnitudo in infinitum augetur. Dein dic: ut ejus motus amiſſus, quo tempore progrediendo longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribit, eſt ad ejus motum totum ſub initio, ita motus quem ſolidum quodvis datum, in Fluido eodem jam facto ſubtiliſſimo, deſcribendo diametri ſuæ longitudinem amitteret, eſt ad ejus motum totum ſub initio quamproxime. Nam ſi particulæ minimæ Fluidi ſubtiliati eandem habeant proportionem eundemque ſitum ad ſolidum datum in eo movens, quem particulæ totidem minimæ Fluidi non ſubtiliati habent ad ſolidum auctum; ſintque particulæ Fluidi utriuſq; ſumme lubricæ, & viribus centrifugis centripetiſque omnino deſtituantur; incipiant autem ſolida temporibus quibuſcunque proportionalibus in his Fluidis ſimiliter moveri: pergent eadem ſimiliter moveri, adeoque quo tempore deſcribunt ſpatia ſemidiametris ſuis æqualia, amittent partes motuum proportionales totis; idque licet partes Medii ſubtiliati minuantur, & magnitudo ſolidi in Medio non ſubtiliato moventis augeatur in infinitum. Ergo ex reſiſtentia ſolidi aucti in Medio non ſubtiliato, dabitur per proportionem ſuperiorem reſiſtentia ſolidi non aucti in Medio ſubtiliato. *Q. E. I.*

Si particulæ non ſunt ſumme lubricæ, ſupponendum eſt quod in utroq; Fluido ſunt æqualiter lubricæ, eo ut ex defectu lubricitatis reſiſtentia utrinq; æqualiter augeatur: & Propoſitio etiamnum valebit.

Corol. 1.

Corol. 1. Ergo si ex aucta solidi Sphærici magnitudine augeatur ejus resistentia in ratione duplicata; resistentia solidi Sphærici dati ex diminuta magnitudine particularum Fluidi, nullatenus minuetur.

Corol. 2. Sin resistentia, augendo solidum Sphæricum, augeatur in minore quam duplicata ratione diametri: eadem diminuendo particulas Fluidi, diminuetur in ratione qua resistentia aucta deficit a ratione duplicata diametri.

Corol. 3. Unde perspicuum est quod solidi dati resistentia per divisionem partium Fluidi non multum diminui potest. Nam resistentia solidi aucti debebit esse quam proxime ut quantitas materiæ fluidæ resistentis, quam solidum illud movendo protrudit & a locis a se invasis & occupatis propellit: hoc est ut spatium Cylindricum per quod solidum movetur, adeoque in duplicata ratione semidiametri solidi quamproxime.

Corol. 4. Igitur propositis duobus Fluidis, quorum alterum ab altero quoad vim resistendi longissime superatur: Fluidum quod minus resistit est altero rarius; suntque Fluidorum omnium vires resistendi prope ut eorum densitates; præsertim si solida sint magna, & velociter moveantur, & Fluidorum æqualis sit compressio.

Scholium Generale.

Quæ hactenus demonstrata sunt tentavi in hunc modum. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus Globus quartam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor, amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121; ita ut aſcenſu ultimo deſcribaret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor, amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque; & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$ $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime; in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione, & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI. Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quamproxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione: omnino ut in Corollariis Propoſitionis XXXII. demonſtratum eſt.

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Et cum velocitates maximæ in prædictis ſex Caſibus, ſint ut arcuum dimidiorum $1\frac{7}{8}$, $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 chordæ, atque adeo ut arcus ipſi quamproxime, hoc eſt ut numeri $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16: ſcribamus in Caſu ſecundo quarto & ſexto numeros 1, 4, & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{242}$ æqualis $A + B + C$ in Caſu ſecundo; & $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ æqualis $4A + 8B + 16C$

in

in casu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ æqualis $16A+64B+256C$ in casu sexto. Unde si per has æquationes determinemus quantitates A, B, C; habebimus Regulam inveniendi differentiam arcuum pro velocitate quacunque data.

Cæterum cum velocitates maximæ sint in Cycloide ut arcus oscillando descripti, in circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcubus majores sint in Cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo sint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca: ut ex resistentia in circulo inveniatur resistentia in Trochoide, debebit resistentia augeri in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui in ratione chordæ ad arcum, ob tempus (seu durationem resistentiæ qua arcuum differentia prædicta generatur) diminutum in eadem ratione: id est (si rationes conjungamus) debebit resistentia augeri in ratione arcus ad chordam circiter. Hæc ratio in casu secundo est 6283 ad 6279, in quarto 12566 ad 12533, in sexto 25132 ad 24869. Et inde resistentia $\frac{1}{242}$, $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$, & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ evadunt $\frac{6283}{6279 \times 242}$, $\frac{25132}{12533 \times 35\frac{1}{2}}$ & $\frac{201056}{24869 \times 9\frac{2}{3}}$, id est in numeris decimalibus 0,004135, 0,056486 & 0,8363. Unde prodeunt æquationes $A+B+C=0,004135$: $4A+8B+16C=0,05648$ & $16A+64B+256C=0,8363$. Et ex his per debitam terminorum collationem & reductionem Analyticam fit $A=0,0002097$, $B=0,0008955$ & $C=0,0030298$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0002097\,V + 0,0008955\,V^{\frac{2}{3}} + 0,0030298\,V^2$: & propterea cum per Corol. Prop. XXX. resistentia Globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{16}{23}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0001334\,V + 0,000623\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0022723\,5\,V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est ad 121 digitos. Unde cum V in

casu

casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut 0.003029 ad 121, in quarto ut 0.042875 ad 121, in sexto ut 0.63013 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in Casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima ob resistentiam Aeris non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in Cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius Sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Unde cum corpus tempore minuti unius secundi cadendo (uti per experimenta pendulorum determinavit *Hugenius*) describat pedes *Parisienses* $15\frac{1}{12}$, id est pedes *Anglicos* $16\frac{11}{24}$ seu digitos $197\frac{1}{2}$, & tempora sint in dimidiata ratione spatiorum; Globus tempore minut. 16 tert. 38 quart. cadendo describet 15,278 digitos, & velocitatem suam prædictam acquiret; & propterea cum eadem velocitate uniformiter continuata describet eodem tempore longitudinem duplam 30,556 digitorum. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,63013 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,58172 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi

hujus

hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus ut 0, 58172 ad 213, 4, id est ut 1 ad $366\frac{1}{6}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem pedum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $366\frac{1}{6}$, hoc est velocitatis totius partem $\frac{1}{366\frac{1}{6}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ seu digitorum $3\frac{7}{16}$ describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3262}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descensus Primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Num. Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum duorum & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$, suspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillatio-

oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione prima $\frac{1}{193} = A + B + C$, in ſecunda $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in tertia $\frac{8}{30}$ æqu. $16A + 64B + 256C$. Quæ æquationes per reductiones ſuperius expoſitas dant, $A = 0,00145$, $B = 0,000247$ & $C = 0,0009$. Et inde prodit reſiſtentia Globi cum velocitate V moventis, in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0,000923V + 0,000172V^{\frac{1}{2}} + 0,000675V^2$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0,000675V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0,00227235V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia Globi lignei ad reſiſtentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0,00227235$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0,000675$, id eſt ut 130309 ad 17719 ſeu $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ

Globorum

Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli, & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quamproxime in dimidiata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, id eſt 7 ad $\frac{2}{3}$ ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{3}{4}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 30 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a Nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{8}$, oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam $0,4475$. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$, velocitas ejus diminueretur in ratione illa dimidiata; & arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia $0,4475$ diminueretur in ratione velocitatis, adeoque evaderet $0,4412$. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $67\frac{1}{8}$ ad $124\frac{4}{31}$, differentia iſta $0,4412$ augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet $1,509$. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{4}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 509 dig. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 313, 9. Rursus ubi pendulum superius ex Globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{2}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $\frac{25}{29}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 48, 55. Duxi autem differentias hasce in pondera Globorum ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 313,9 & 48,55. Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,58172 ad 0,63013, id est ut 44,4 ad 48,55; & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti, adeoque partes illæ sunt ut 313,9 & 44,4 quamproxime, id est ut 7,07 ad 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{1}{2}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est ut Globorum resistentiæ 7,07 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est quam quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt (paribus Globis) ut quadrata velocitatum, sunt etiam (paribus velocitatibus) ut quadrata diametrorum Globorum; & propterea (per Corollaria Prop. XL. Libri hujus) resistentia quam Globi majores & velociores in aere movendo sentiunt, haud multum per infinitam aeris divisionem & subtiliationem diminui potest, proindeque Media omnia in quibus corpora multo minus resistuntur, sunt aere rariora.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque (cum demonstratio vacui ex his dependeat) ut experimenta

perimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus digitorum.	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus digitorum.	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum.	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus oscillationum in aqua.			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus oscillationum in aere.	$35\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amissi sunt. Erant autem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua, nimirum in ratione 44 ad 41. Nam $14\frac{2}{3}$ oscillationes in aqua, & $15\frac{2}{3}$ in aere simul peragebantur. Et propterea si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, numerus oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur (ob resistentiam auctam in ratione illa duplicata & tempus diminutum in ratione eadem sim-

 plici)

plici) diminueretur in eadem illa ratione 44 ad 41, adeoque evaderet $1\frac{1}{5}$ in $\frac{41}{44}$ seu $\frac{123}{110}$. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $\frac{123}{110}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $\frac{123}{110}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in Casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV+CV^2$ resistentiam Globi in aere cum velocitate V moventis, & cum velocitas maxima, in Casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ ut 1 ad 8, & resistentia in Casu columnæ quartæ ad resistentiam in Casu columnæ primæ in ratione arcuum differentiæ in his casibus, ad numeros oscillationum applicatæ, id est ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his Casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro resistentiis, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$ & $8A+64C=4280$ seu $A+8C=535$, indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$ & $C=64\frac{3}{14}$ & $A=21\frac{2}{7}$; atque adeo resistentia ut $21\frac{2}{7}V+64\frac{3}{14}V^2$ quamproxime. Quare in Casu columnæ quartæ ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $21\frac{2}{7}+64\frac{3}{14}$ seu $85\frac{1}{2}$, ad $64\frac{3}{14}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $85\frac{1}{2}$ ad $64\frac{3}{14}$ & 535 ad $\frac{123}{110}$ conjunctim, id est ut 637 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum

rum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod Arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediebat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur, resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam construendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in Aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabula sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus.	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proportionalis	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Resistentia hic nunquam augetur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Et idem in pendulo majore evenire verisimile est, si modo Arca augeatur in ratione penduli. Debebit tamen resistentia tam in aere quam in aqua, si velocitas per gradus in infinitum augeatur, augeri tandem in ratione paulo plusquam duplicata, propterea quod in experimentis hic descriptis resistentia minor est quam pro ratione de corporibus velocissimis in Libri hujus Prop. xxxvi & xxxviii. demonstrata. Nam corpora longe velocissima spatium a tergo relinquent vacuum, ideoque resistentia quam sentiunt in partibus præcedentibus, nullatenus minuetur per pressionem Medii in partibus posticis.

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia

pars

pars digiti. Ad filum autem proxime supra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque successive oscillante invenirem proportionem resistentiarum: & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in ea ratione ad resistentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immersi. Ampliato Globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora pari densitate proculdubio magis resistunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus vini. Verum in liquoribus qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in aqua seu dulci seu salsa, in Spiritibus vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fœcibus per destillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam Fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Quare cum Globus aqueus in aere movendo resistentiam patiatur qua motus sui pars $\frac{1}{3260}$, interea dum longitudinem semidiametri

ametri

ametri suæ describat (ut jam ante ostensum est) tollatur, sitque densitas aeris ad densitatem aquæ ut 8co vel 850 ad 1 circiter, consequens est ut hæc Regula generaliter obtineat. Si corpus quodlibet Sphæricum in Medio quocunque satis Fluido moveatur, & spectetur resistentiæ pars illa sola quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc pars erit ad vim quæ totum corporis motum, interea dum corpus idem longitudinem duarum ipsius semidiametrorum motu illo uniformiter continuato describat, vel tollere posset vel eundem generare, ut densitas Medii ad densitatem corporis quamproxime. Igitur resistentia quasi triplo major est quam pro lege in Corollario primo Propositionis xxxviii. allata; & propterea partes quasi duæ tertiæ motus illius omnis quem Globi partes anticæ movendo imprimunt in Medium, restituuntur in Globi partes posticas a Medio in orbem redeunte, inque spatium irruente quod Globus alias vacuum post se relinqueret. Unde si velocitas Globi eousque augeatur ut Medium non posset adeo celeriter in spatium illud irruere, quin aliquid vacui a tergo Globi semper relinquatur, resistentia tandem evadet quasi triplo major quam pro Regula generali novissime posita.

Hactenus experimentis usi sumus oscillantium pendulorum, eo quod eorum motus facilius & accuratius observari & mensurari possint. Motus autem pendulorum in gyrum actorum & in orbem redeundo circulos describentium, propterea quod sint uniformes & eo nomine ad investigandam resistentiam datæ velocitati competentem longe aptiores videantur, in consilium etiam adhibui. Faciendo enim ut pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos prima & ultima revolutione descripsit. Et inde collegi velocitates corporis sub initio & fine. Tum dicendo quod corpus, velocitate mediocri describendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi resistentiam qua differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti posset; & resistentia inventa, quanquam hujus generis experimenta

menta minus accurate tentare licuit, probe tamen cum præcedentibus congruebat.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis hujus opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante Pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget.) Huic ponderi addebam pondus aeris quam pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis Metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam

bam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum distracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacui, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quæ resistuntur: erit $78\,B$ resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ resistentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $A+78\,B$ ut 77 ad 78, & divisim $A+B$ ad $77\,B$ ut 77, ad 1, indeque $A+B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ oriatur ab actione Fluidi alicujus subtilis in Metallum inclusum. At causam longe aliam esse opinor. Nam tempora oscillationum pyxidis plenæ minora sunt quam tempora oscillationum pyxidis vacuæ, & propterea resistentia pyxidis plenæ in externa superficie major est, pro ipsius velocitate & longitudine spatii oscillando descripti, quam ea pyxidis vacuæ. Quod cum ita sit, resistentia pyxidum in partibus internis aut nulla erit aut plane insensibilis.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

Eadem methodo qua invenimus resistentiam corporum Sphæricorum in Aqua & argento vivo, inveniri potest resistentia corporum figurarum aliarum; & sic Navium figuræ variæ in Typis exiguis constructæ inter se conferri, ut quænam ad navigandum aptissimæ sint, sumptibus parvis tentetur.

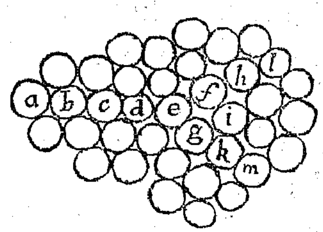
SECT. VIII.

De Motu per Fluida propagato.

Prop. XLI. Theor. XXXI.

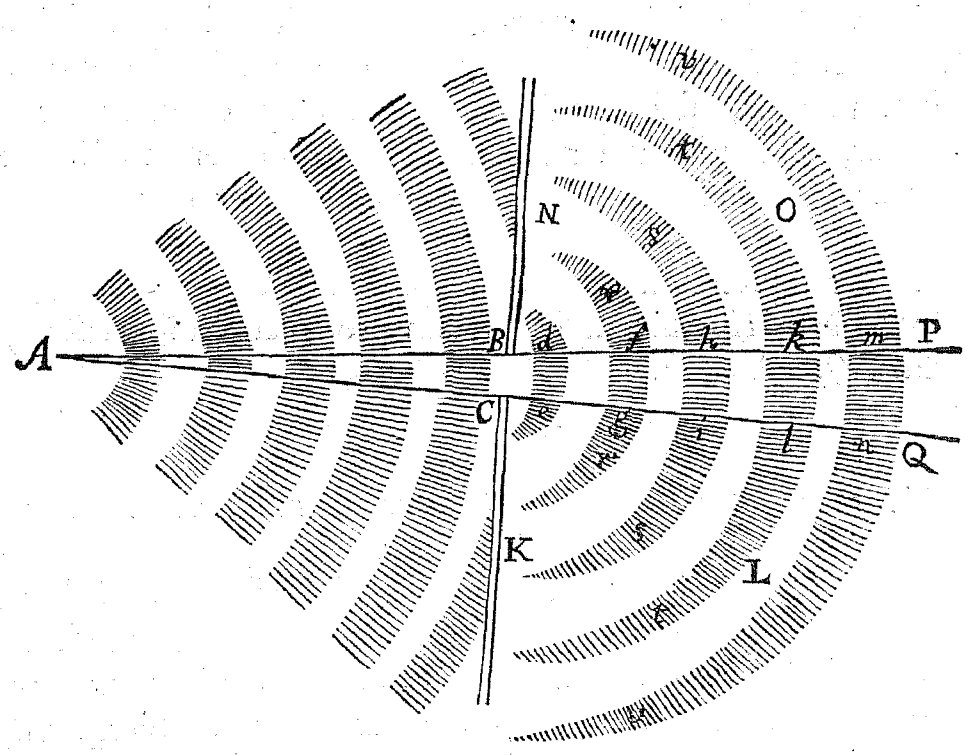
Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulcian-



tur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*

Corol. Si pressionis a dato puncto per Fluidum propagatæ pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam



demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *N B C K* perforato in *B C*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *A P Q*, quæ per foramen circulare *B C* transit. Planis transversis *d e*, *f g*, *h i* distinguatur conus *A P Q* in frusta

& interea dum conus *A B C*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *d e g f* in superficie *d e*, & hoc frustum urget frustum proximum *f g i h* in superficie *f g*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum *d e f g*, reactione frusti secundi *f g h i*, tantum urgebitur & premetur in superficie *f g*, quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur *d e g f* inter Conum *A d e* & frustum *f h i g* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus *d e*, *f g* conabitur cedere ad latera *d f*, *e g*; ibique (cum rigidum non sit, sed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *d f*, *e g* quam frustum *f g h i* eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a lateribus *d f*, *e g* in spatia *N O*, *K L* hinc inde, quam propagatur a superficie *f g* versus *P Q*. *Q. E. D.*

Prop. XLII. Theor. XXXII.

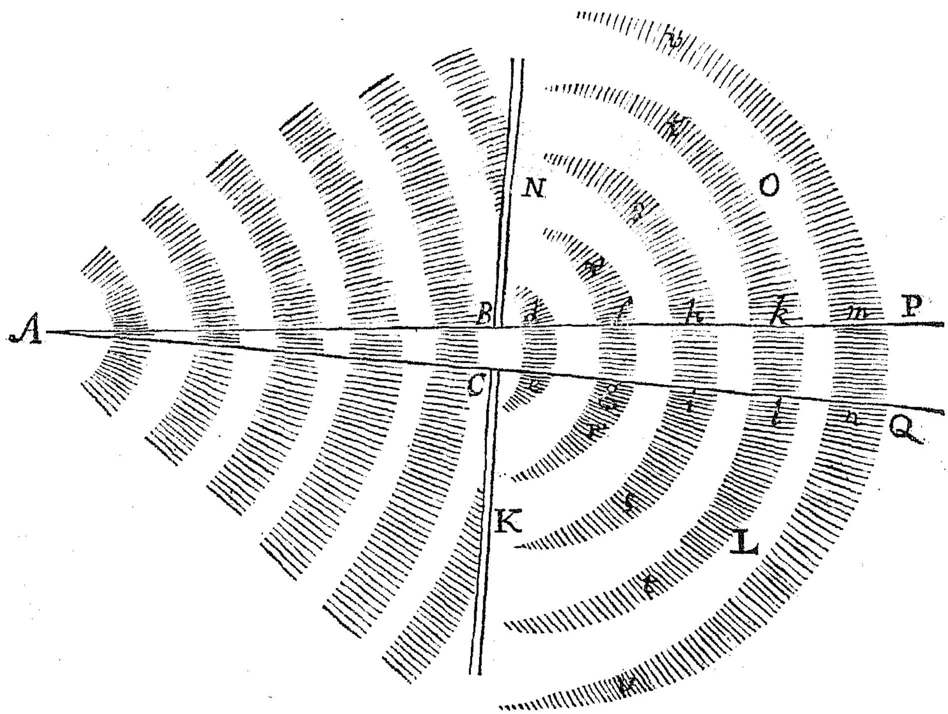
Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *B C*, pergatque (si fieri potest) in spatio conico *B C Q P*, secundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque *d e*, *f g*, *h i*, *k l*, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in Fluidi partibus immotis *L K*, *N O*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde versus *K L* & *N O*: & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in Fluidi partibus immotis *K L*, *N O*; defluet

eadem

eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipsæ ab *A* versus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus a puncto *A* per Medium Elasticum successive propagatos.



Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima Sphæricam

occupet

occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*, dilatabit sese tam versus spatia illa *KL*, *NO* utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoq; pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem celeritate sese in Medii partes quiescentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque spatium totum *KLON* occupabunt. *Q.E.D.* Hoc experimur in sonis, qui vel domo interposita audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non reflexi a parietibus oppositis sed a fenestra directe propagati.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio ista non fit nisi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur Fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* transiit, dilatari incipiet, & abinde tanquam a principio & centro in partes omnes directe propagari. *Q.E.D.*

Prop. XLIII. Theor. XXXIII.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in Medio vero non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rareſiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. *Q. E. D.* Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum Sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis Elaſticæ.

Quod ſi Medium non ſit Elaſticum: quoniam ejus partes a corporis

poris tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum, sed in circulum eundo pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quæ corpus relinquit, & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in Orbem ad partes quæ eidem cedunt.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem per Medium ambiens secundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium flammæ sed a totius dilatatione derivari.

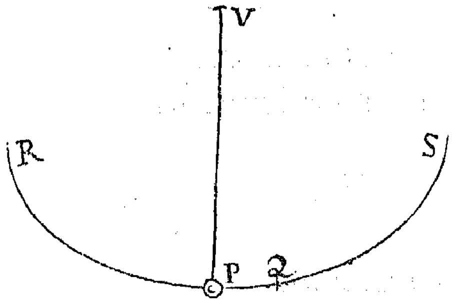
Prop. XLIV. Theor. XXXIV.

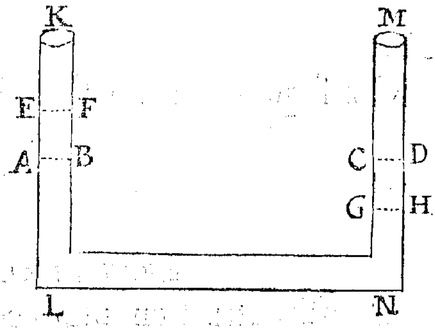
Si Aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando. Designent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF, descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus

pendulum,

pendulum, *V P* filum, *V* punctum suspensionis, *S P Q R* Cyclois quam Pendulum describat, *P* ejus punctum infimum, *P Q* arcus altitudini *A E* æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus





acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque ubi aqua in crure *K L* ascendit ad *EF*, & in crure altero descendit ad *G H*, vis illa est pondus duplicatum aquæ *E A B F*, & propterea est ad pondus aquæ totius ut *A E* seu *P Q* ad *V P* seu *P R*. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in Cycloide, est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia *P Q* a loco infimo *P*, ad Cycloidis longitudinem *P R*. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia *A E*, *P Q* describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque vires illæ, si aqua & pendulum in principio, æquali cum velocitate moveantur; pergent eadem temporibus æqualiter movere, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt Isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6\frac{1}{9}$, aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis, tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione dimidiata.

Prop. XLV. Theor. XXXV.

Undarum velocitas est in dimidiata ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

Prop. XLVI. Prob. XI.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam quæ vel vallibus imis vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem, sintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc infimæ sunt, mox fiant altissimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV) si distantiæ inter undarum loca altissima *A*, *C*, *E*, & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini, partes altissimæ *A*, *C*, *E* tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum Undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est Unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quam proxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in dimidiata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

Prop. XLVII. Theor. XXXVI.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex dimidiata ratione vis Elasticæ directe & dimidiata ratione densitatis inverse; si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt,& in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

 Cas. 2.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione dimidiata materiæ & ratione dimidiata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si Medii vel densitas vel vis Elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in dimidiata ratione densitatis, ac diminuetur in dimidiata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione dimidiata densitatis Medii inverse & ratione dimidiata vis Elasticæ directe. *Q. E. D.*

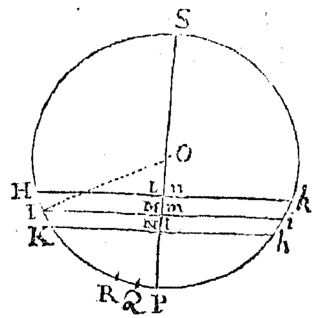
Prop. XLVIII. Theor. XXXVII.

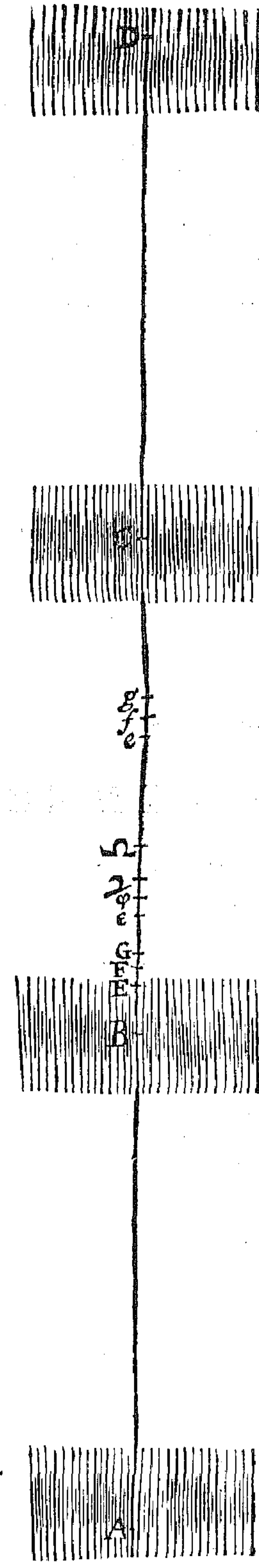
Pulsibus per Fluidum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.

Designent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria Physica Medii quiescentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee*, *Ff*, *Gg*, spatia

æqualia

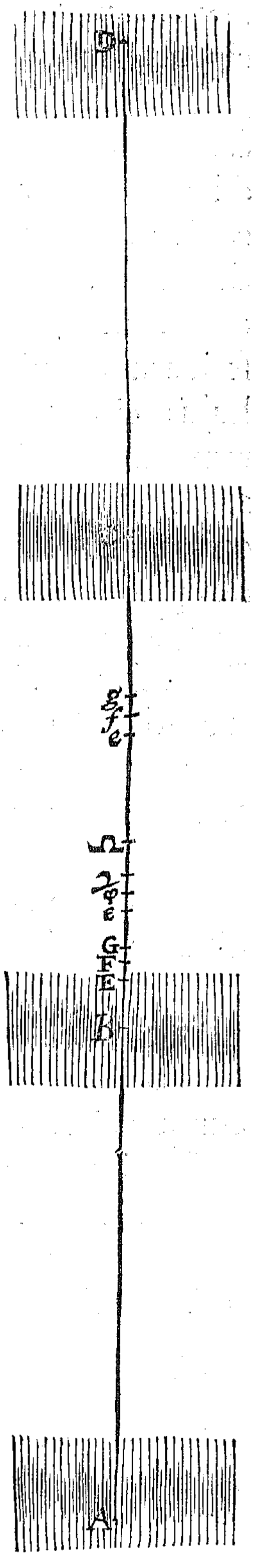
æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas Phyſicas ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, ſi demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *Ee* æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Phyſicum *E* reperiatur in ε. Hac lege punctum quodvis *E* eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E* iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus, vibrationes ſingulas peraget cum oſcillante Pendulo. Probandum eſt quod ſingula Medii puncta Phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a cauſa quacunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.



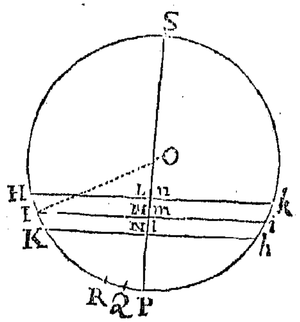


In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulſuum intervallum totum *BC*. Et demiſſis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, ſi *PH* vel *PHSk* ſit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel

vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSh$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipsis Pn, Pm, Pl in punctorum reditu, æquales respective. Unde $\varepsilon\gamma$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis Medii EG in loco $\varepsilon\gamma$, & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut $EG-LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG+ln$ seu $EG+LN$ ad EG. Quare cum sit LN ad KH ut IM ad radium OP, & EG ad BC ut HK ad circumferentiam $PHShP$, & vicissim EG ad HK ut BC ad circumferentiam $PHShP$; id est (si circumferentia dicatur Z) ut $\frac{OP \times BC}{Z}$ ad OP, & ex æquo LN ad EG ut IM ad $\frac{OP \times BC}{Z}$: erit expansio partis EG in loco $\varepsilon\gamma$ ad expansionem mediocrem quam habet in loco suo primo EG, ut $\frac{OP \times BC}{Z} - IM$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in itu, utque $\frac{OP \times BC}{Z} + im$ ad $\frac{OP \times BC}{Z}$ in reditu. Unde si $\frac{OP \times BC}{Z}$ dicatur V, erit expansio partis EG, punctive Physici F, ad ejus expansionem mediocrem in itu, ut $V-IM$ ad V, in reditu ut $V+im$ ad V; & ejusdem vis elastica ad vim suam elasticam medio- in itu, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$; in reditu ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires Elasticæ punctorum Physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim



vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt (ſi ob brevitatem pulſuum ſupponamus HK & KN indefinite minores eſſe quantitate V) ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. Et eodem argumento differentia virium Elaſticarum punctorum Phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id eſt exceſſus vis Elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ,) eſt vis qua interjecta Medii lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut ipſius diſtantia a Medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*



Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari deſinunt.

Prop. XLIX. Prob. XII.

Datis Medii denſitate & vi Elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri

ſtri comprimi, ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione ſuperiore conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica, EF ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis P & S, a vi Elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus Perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in dimidiata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in dimidiata ratione longitudinis $\frac{1}{2}PS$ ſeu PO ad longitudinem A. Sed vis Elaſtica qua lineola Phyſica EG, in locis ſuis extremis P, S exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis ſuperioris) ad ejus vim totam Elaſticam ut $HL - KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, qua lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; adeoque ex æquo, vis qua lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in dimidiata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elaſtica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$, atque adeo ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$ & PO ad A conjunctim;

id

id est (cùm fuerit, in superiore Propositione, V æqualis $\frac{PO \times BC}{Z}$, & HK æqualis $\frac{EG \times Z}{BC}$) in dimidiata ratione $\frac{PO\,qu. \times BC \times EG}{Z}$ ad $\frac{EG \times Z \times A\,qu.}{BC}$ seu $PO\,qu. \times BC\,qu.$ ad $Z\,qu. \times A\,qu.$ hoc est in ratione $PO \times BC$ ad $Z \times A$, seu BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC, est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut BC ad $\frac{Z \times A}{PO}$, id est ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius est A. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium BC, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Prop. L. Prob. XIII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Schol.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola (per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quàm aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modò vehementes sint & gra-

 ves,

ves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi *Mercurius* in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 850 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11617. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 348500 digitorum seu pedum *Anglicorum* 29042. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus *A*. Circuli radio 29042 pedum descripti circumferentia est pedum 182476. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; pendulum pedes 29042, seu digitos 348500, longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $188\frac{4}{7}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 182476, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 968. Scribit *Mersennus*, in Balisticæ suæ Prop. XXXV. se factis experimentis invenisse quod sonus minutis quinque secundis hexapedas *Gallicas* 1150 (id est pedes *Gallicos* 6900) percurrat. Unde cum pes *Gallicus* sit ad *Anglicum* ut 1068 ad 1000, debebit sonus tempore minuti unius secundi pedes *Anglicos* 1474 conficere. Scribit etiam idem *Mersennus* *Robervallum* Geometram clarissimum in Obsidione *Theodonis* observasse tormentorum fragorem exauditum esse post 13 vel 14 ab igne viso minuta secunda, cùm tamen vix dimidium *Leucam* ab illis Tormentis abfuerit. Continet *Leuca Gallica* hexapedas 2500, adeoque sonus tempore 13 vel 14 secundorum, ex Observatione *Robervalli*, confecit pedes *Parisienses* 7500, ac tempore minuti unius secundi pedes *Parisienses* 560, *Anglicos*

verò

verò 600 circiter. Multum differunt hæ Obſervationes ab invicem, & computus noſter medium locum tenet. In porticu Collegii noſtri pedes 208 longa, ſonus in termino alterutro excitatus quaterno recurſu Echo quadruplicem efficit. Factis autem experimentis inveni quod ſingulis ſoni recurſibus pendulum quaſi ſex vel ſeptem digitorum longitudinis oſcillabatur, ad priorem ſoni recurſum eundo & ad poſteriorem redeundo. Longitudinem penduli ſatis accuratè definire nequibam: ſed longitudine quatuor digitorum, oſcillationes nimis celeres eſſe, ea novem digitorum nimis tardas judicabam. Unde ſonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quàm pendulum digitorum novem, & majore quàm pendulum digitorum quatuor oſcillatur; id eſt minore tempore quàm $28\frac{3}{4}$ minutorum tertiorum, & majore quàm $19\frac{1}{6}$; & propterea tempore minuti unius ſecundi conficit pedes *Anglicos* plures quàm 868 & pauciores quàm 1372, atque adeò velocior eſt quàm pro Obſervatione *Robervalli*, ac tardior quàm pro Obſervatione *Merſenni*. Quinetiam accuratioribus poſtea Obſervationibus definivi quod longitudo penduli major eſſe deberet quàm digitorum quinque cum ſemiſſe, & minor quàm digitorum octo; adeoque quòd ſonus tempore minuti unius ſecundi confecit pedes *Anglicos* plures quàm 920 & pauciores quàm 1085. Igitur motus ſonorum, ſecundum calculum Geometricum ſuperius allatum, inter hos limites conſiſtens, quadrat cum Phænomenis, quatenus hactenus tentare licuit. Proinde cùm motus iſte pendeat ab aeris totius denſitate, conſequens eſt quod ſoni non in motu ætheris vel aeris cujuſdam ſubtilioris, ſed in aeris totius agitatione conſiſtat.

Refragari videntur experimenta quædam de ſono in vaſis aere vacuis propagato, ſed vaſa aere omni evacuari vix poſſunt; & ubi ſatis evacuantur ſoni notabiliter imminui ſolent; *Ex. gr.* Si aeris totius pars tantùm centeſima in vaſe maneat, debebit ſonus eſſe centuplo languidior, atque adeò non minus audiri quàm ſi quis ſonum eundem in aere libero excitatum audiendo, ſubinde ad decu-

 plam

plam distantiam à corpore sonoro recederet. Conferenda sunt igitur corpora duo æqualiter sonora, quorum alterum in vase evacuato, alterum in aere libero consistat, & quorum distantiæ ab auditore sint in dimidiata ratione densitatum aeris: & si sonus corporis prioris non superat sonum posterioris objectio cessabit.

Cognita sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Scribit *Mersennus* (Lib. I. Harmonicorum Prop. IV.) se (factis experimentis quibusdam quæ ibidem describit) invenisse quod nervus tensus vicibus 104 recurrit spatio minuti unius secundi, quando facit Unisonum cum organica Fistula quadrupedali aperta vel bipedali obturata, quam vocant Organarii *C fa ut*. Sunt igitur pulsus 104 in spatio pedum 968, quos sonus tempore minuti secundi describit: adeoque pulsus unus occupat spatium pedum $9\frac{1}{4}$ circiter; id est duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est quòd latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porrò cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutiùs audiuntur ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quàm cum proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVIII. Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis Stenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impedientibus tardiùs amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECT.

SECT. IX.

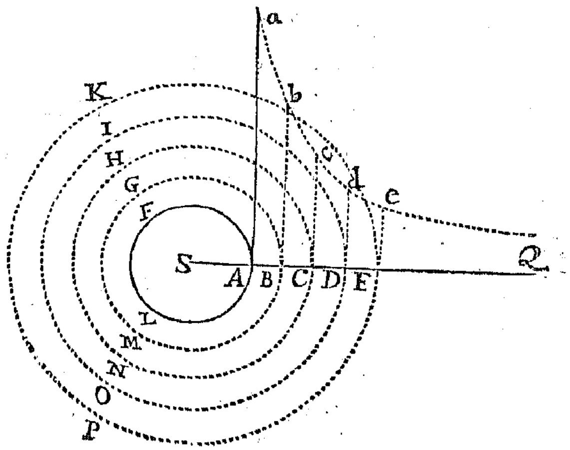
De motu Circulari Fluidorum.

Hypothesis.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

Prop. LI. Theor. XXXVIII.

Si Cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in Orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.



Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est

est vel minor, ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impressio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est inversè ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est (conjunctis rationibus) ut quadrata distantiarum inversè. Quare si ad infinitæ rectæ *S A B C D E Q* partes singulas erigantur perpendicula *A a*, *B b*, *C c*, *D d*, *E e*, &c. ipsarum *S A*, *S B*, *S C*, *S D*, *S E*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt summæ distantiarum, hoc est motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *A a*, *B b*, *C c*, *D d*, *E e*: id est, si ad constituendum Medium uniformiter fluidum orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his summis Analogæ *A a Q*, *B b Q*, *C c Q*, *D d Q*, *E e Q*, &c. & tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciprocè ut area *D d Q*, hoc est (per notas Curvarum quadraturas) directè ut distantia *S D*. *Q. E D.*

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe Cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineantur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Co-

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi Syſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter, communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quàm fluidi partes ſingulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare, & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecùs impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in aqua profunda ſtagnante experiri licet.

Prop. LII. Theor. XXXIX.

Si Sphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro Sphæræ. Fig. Prop. LI.

Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur

guatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc est inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ $SABCDEQ$ partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ distantiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut area DdQ, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum distantiæ SD. Id quod volui primò demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuò superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos

nulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectà pergens movebitur pro lege caſus primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus eſt, neque adeò motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter diſtant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta polos quàm juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundo demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motus circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut priùs. His ſectionibus annuli omnes quamminimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis,& abinde orta vis centrifuga, major ſit ad Eclipticam quàm ad polos; debebit cauſa aliqua adeſſe qua particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur, ne materia quæ ad Eclipticam eſt recedat ſemper à centro & per exteriora Vorticis migret ad polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi,& velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione perpetuò communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui planè invariatam; patet quod motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum à quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat quam imprimit in materiam vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latiùs serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuò ob motum

tum

tum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. aſſignatam) & vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli, eadem ratione qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuò paulatim excurrent; globiq; per actiones vorticum in ſe mutuò, perpetuò movebuntur de locis ſuis; uti in Lemmate ſuperiore expoſitum eſt; neq; certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si Fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintq; eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum incluſum & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone tempus revolutionis hujus esse ad summam hujus temporis & temporis revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunq; moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neq; prius desinent fluidum & vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8. 9 & 10 definiti, nec in alio unquam statu quocunq; perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur Systema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neq; motus suos in se mutuò per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter se, & Systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & æquales, ad æquales semper à se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum

cir-

circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minùs fluida est magis cohærebit & segnior erit, adeoq; motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit quàm pro ratione superiùs assignata. Si figura vasis non sit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à spatiis angustioribus in latiora recedent paulò longiùs à centro, sed isto recessu tardescent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio Vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione Phænomena cœlestia per Vortices explicari possint. Nam Phænomenon est quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquialtera distantiarum à centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utrisque quam accuratissimè, quatenus observationes Astronomicæ hactenus prodidêre. Ideoq; si Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam am hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum à centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquialteram reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat à centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quàm ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi Demonstrationum gratia Hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. Quo concesso tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs usque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio sesquialtera neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaq; Philosophi quo pacto Phænomenon illud rationis sesquialteræ per Vortices explicari possit.

Prop. LIII. Theor. XL.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neq; quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam

quam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium à centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in Fluidum reſolutum fit pars Vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proximè ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs; adeoq; Vorticis vim illam, qua priùs in Orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet à centro & revolvendo deſcribet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem ſemper redit, relativè quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro Vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

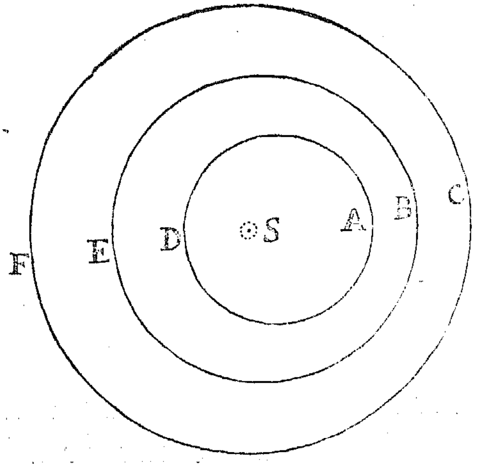
Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ ſecundum Hypotheſin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipſibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa Solem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia ſint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardiùs movebitur in Aphelio *B* & velociùs in Perihelio *C*, ſecundum leges Aſtronomicas; cum tamen ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velociùs

moveri

Pg 384 - 399 missing from book

moveri debeat quàm in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic



in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quàm in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relativè quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piſcium. Itaq; Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omninò pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate pleniùs docebitur.

DE

DE
Mundi Systemate
LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, ij vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent quibus à multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, author esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulò legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

HYPOTHESES.

Hypoth. I. *Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & veræ sint & earum Phænomenis explicandis sufficiant.*

Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

Hypoth. II. *Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ.*

Uti respirationis in Homine & in Bestia; descensûs lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terra & in Planetis.

Hypoth. III. *Corpus omne in alterius cujuscunque generis corpus transformari posse, & qualitatum gradus omnes intermedios successivè induere.*

Hypoth. IV. *Centrum Systematis Mundani quiescere.*

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro quiescere contendant.

Hypoth. V. *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquialtera distantiarum ab ipsius centro.*

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in ratione sesquialtera semidiametrorum orbium consentiunt Astronomi: & *Flamstedius*, qui omnia Micrometro & per Eclipses Satellitum accuratius definivit, literis ad me datis, quinetiam numeris suis mecum communicatis, significavit rationem illam sesquialteram tam accuratè obtinere, quàm sit possibile sensu deprehendere. Id quod ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum

Satellitum tempora periodica.

1d. 18h. $28'\frac{3}{5}$. 3d. 13h. $17'\frac{9}{10}$. 7d. 3h. $59'\frac{3}{5}$. 16d. 18h. $5'\frac{1}{5}$.

Distantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex Observationibus	1.	2	3	4	
Cassini	5.	8.	13.	23.	Semidiam. Jovis.
Borelli	$5\frac{2}{3}$.	$8\frac{2}{3}$.	14.	$24\frac{2}{3}$.	
Tounlei *per Micromet-*	5,51.	8,78.	13,47.	24,72.	
Flamstedii *per Microm.*	5,31.	8,85.	13,98.	24,23.	
Flamst. *per Eclips. Satel.*	5,578.	8,876.	14,159.	24,903.	
Ex temporibus periodicis.	5,578.	8,878.	14,168.	24,968.	

Hypoth. VI. *Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

Hypoth. VII. *Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquialtera mediocrium distantiarum à Sole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemq; orbium dimensiones, sive Planetæ circa Terram, sive iidem circa Solem revolvantur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissimè ex Observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non diffe-

differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula ſequente videre licet.

Planetarum ac Telluris Diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes Satellitum Jovis. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

Hypoth. VIII. *Planetas primarios radiis ad Terram ductis areas deſcribere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.*

Nam reſpectu terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprimè demonſtratur per Eclipſes Satellitum, quibus Eclipſibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

Hypoth. IX. *Lunam radio ad centrum terræ ducto aream tempori proportionalem deſcribere.*

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias Phyſicis ~~in~~ hiſce Hypotheſibus negligo.

Prop.

Prop. I. Theor. I.

Vires, quibus Planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Hypoth. V. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars poſterior per Hypoth. V. & Corol. 6. Prop. IV. ejuſdem Libri.

Prop. II. Theor. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Hypoth. VIII. & Prop. II. Lib. I. & pars poſterior per Hypoth. VII. & Prop. IV. ejuſdem Libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Coral. I. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

Prop. III. Theor. III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe ſuo reſpicere terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior, per Hypoth. IX. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim, per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I. quod ſi diſtantia Lunæ à centro Terræ dicatur

tur *D*, vis à qua motus talis oriatur, ſit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt reciprocè ut ea ipſius *D* dignitas, cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ vicibus $60\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Tantillus autem acceſſus meritò contemnendus eſt. Oritur verò ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Reſtat igitur ut vis illa, quæ ad Terram ſpectat, ſit reciprocè ut D^2; id quod etiam plenius conſtabit, conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Prop. IV. Theor. IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à centro Terræ eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum pleroſque Aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Kircherum* $62\frac{1}{2}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt Parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi 61 ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & Lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti à Gallis menſurantibus nuper definitum eſt: & ſi Luna motu omni privari fingatur, ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe ſuo retinetur, deſcendat in terram; hæc ſpatio minuti primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur

hoc

hoc ex calculo, vel per Propositionem xxxvi Libri primi, vel (quod eodem recedit) per Scholium Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata distantiæ ratione inversâ, adeoque ad superficiem Terræ major sit vicibus 60 x 60 quam ad Lunam, corpus vi illa in regionibus nostris cadendo describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses 60 x 60 x 15 $\frac{1}{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes 15 $\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses 15 $\frac{1}{12}$, uti *Hugenius*, factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea vis qua Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab ea diversa est, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent pedes Parisienses 30 $\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in Hypothesi quod Terra quiescit. Nam si Terra & Luna circa Solem moveantur, & interea quoque circa commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60 $\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

Prop. V. Theor. V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, & circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & Mercurii ac Veneris reliquorumque circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Hypoth. II. à causis ejusdem generis dependent: præsertim cùm demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis ac Solis, & re-

cedendo

cedendo à Jove & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Corol. 1. Igitur gravitas datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove nemo dubitat. Certe Planeta Hugenianus,eodem argumento quo Satellites Jovis gravitant in Jovem, gravis eſt in Saturnum. Et cum attractio omnis (per motus legem tertiam) mutua ſit, Saturnus viciſſim gravitabit in Planetam Hugenianum. Eodem argumento Jupiter in Satellites ſuos omnes, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem,quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, ſale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pixides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aeris reſiſtentiam omnino paria: Et paribus oſcillationibus juxta poſitæ ibant unà & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. & 6.Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt

eſt ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terreſtria ad uſque Orbem Lunæ, & una cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia Spatia cum Luna, adeoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porrò quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum a centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent æqualia Spatia, perinde ut fit in gravibus, in hac Terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis dimiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porrò Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem pro quantitate materiæ ſuæ quàm cæteri, motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole diſtantiis) Satelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate materiæ ſuæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis major ſemper foret quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione dimidiata quam proximè; uti calculis quibuſdam initis inveni. Et ſi Satelles minus gravis eſſet in Solem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quàm diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illa dimidiata. Igitur ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quàm diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis excentricitas foret valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitis ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minus quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora Terreſtria, quæ apud nos ſunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera eſſent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum sensibilium non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia: omninò contra experientiam.

Corol. 2. Igitur corpora univerſa quæ circa Terram ſunt, gravia ſunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Nam ſi æther

aut

aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret, quoniam id non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, (per Hypoth. III.) & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Itaque Vacuum necessariò datur. Nam si spatia omnia plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minimè descendunt.

Corol. 4. Gravitatem diversi generis esse à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Estque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis: sed & in eodem corpore intendi potest & remitti; in recessu verò à magnete decrescit in ratione distantiæ plusquam duplicata; propterea quod vis longe fortior sit in contactu, quam cum attrahentia ~~vel minimum~~ aliquantulum separantur ab invicem.

Prop. VII. Theor. VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde consequens eſt, (per Prop. LXIX. Lib.I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porrò cum Planetæ cujuſvis *A* partes omnes graves ſint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis ſit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hac lege gravitare deberent in ſe mutuò, cùm tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: Reſpondeo quod gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in Terram totam ut ſunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor eſt quam quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

Prop. VIII. Theor. VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciprocè pro-

proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an verò quam proximè. Nam fieri poſſet ut proportio illa in majoribus diſtantiis ſatis obtineret, at prope ſuperficiem Planetæ, ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV. Libri primi & ipſius Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad ſuperficies Planetarum aliasve quaſvis à centro diſtantias majora ſunt vel minora (per hanc Propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circa Solem dierum $224\frac{2}{3}$, Satellitis extimi circumjovialis circa Jovem dierum $16\frac{3}{4}$, Satellitis Hugeniani circa Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circa Terram 27 *dier.* 7 *hor.* 43 *min.* collatis cum diſtantia mediocri Veneris à Sole; cum Elongatione maxima Heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis, quæ (in mediocri Jovis à Sole diſtantia juxta obſervationes *Flamſtedii*) eſt 8′. 13″; cum elongatione maxima Heliocentrica Satellitis Saturnii 3′. 20″; & cum diſtantia Lunæ à Terra, ex Hypotheſi quod Solis parallaxis horizontalis ſeu ſemidiameter Terræ è Sole viſæ ſit quaſi 20″; calculum ineundo inveni quod corporum æqualium & à Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter diſtantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{2360}$ & $\frac{1}{28700}$ reſpectivè. Eſt autem Solis ſemidiameter mediocris apparens quaſi 16′. 6″. Illam Jovis è Sole viſam *Flamſtedius*, ex umbræ Jovialis diametro per Eclipſes Satellitum inventa, determinavit eſſe ad elongationem Satellitis extimi ut 1 ad 24,9 adeoque cum elongatio illa ſit 8′. 13″ ſemidiameter Jovis è Sole viſi erit $19''\frac{3}{4}$. Diameter Saturni eſt ſit ad diametrum Annuli ejus ut 4 ad 9, & diameter annuli è Sole viſi (menſurante *Flamſtedio*) 50″, adeoque ſemidiameter Saturni è Sole viſi 11″. Malim dicere 10″ vel 9″, propterea quod globus Saturni per lucis inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur. Hinc inito calculo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ ſemidiametri ad invicem ut 10000, 1063, 889, & 208. Unde cum pondera æqualium corporum à centris Solis, Jovis, Saturni ac Telluris æqualiter diſtantium ſint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{2360}$, $\frac{1}{28700}$ reſpective, & auctis vel diminutis diſtantiis diminuuntur vel augentur pondera in duplicata ratione; erunt pondera eorundem æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum & Terram, in diſtantiis 10000, 1063, 889 & 208 ab eorum centris, atque adeo in eorum ſuperficiebus verſantium, ut 10000, 804$\frac{1}{2}$, 536 & 805$\frac{1}{2}$ reſpectivè. Pondera corporum in ſuperficie Lunæ ferè duplo minora eſſe quam pondera corporum in ſuperficie Terræ dicemus in ſequentibus.

Corol. 2. Igitur pondera corporum æqualium, in ſuperficiebus Terræ & Planetarum, ſunt fere in ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole viſarum. De Terræ quidem diametro è Sole viſa nondum conſtat. Hanc aſſumpſi 40″, propterea quod obſervationes *Kepleri*, *Riccioli* & *Vendelini* non multo majorem eſſe permittunt; eam *Horroxii* & *Flamſtedii* obſervationes paulo minorem adſtruere videntur. Et malui in exceſſu peccare. Quòd ſi fortè diameter illa & gravitas in ſuperficie Terræ mediocris ſit inter diametros Planetarum & gravitatem in eorum ſuperficiebus: quoniam Saturni, Jovis, Martis, Veneris & Mercurii è Sole viſorum diametri ſunt 18″, 39″$\frac{1}{2}$, 8″, 28″, 20″ circiter, erit diameter Terræ quaſi 24″, adeoque Parallaxis Solis quaſi 12″, ut *Horroxius* & *Flamſtedius* propemodum ſtatuere. Sed diameter paulo major melius congruit cum Regula hujus Corollarii.

Corol. 3. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in Planetis ſingulis. Nam quantitates illæ ſunt ut Planetarum Vires in diſtantiis à ſe æqualibus; id eſt in Sole, Jove, Saturno ac Terra ut 1,

$\frac{1}{1100}$, $\frac{1}{23600}$, $\frac{1}{28700}$ respectivè. Si Parallaxis Solis statuatur minor quàm 20″, debebit quantitas materiæ in Terra diminui in triplicata ratione.

Corol. 4. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam corporum æqualium & homogeneorum pondera in Sphæras homogeneas in superficiebus Sphærarum, sunt ut Sphærarum diametri per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera applicata ad diametros. Erant autem veræ Solis, Saturni, Jovis ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 889, 1063 & 208, & pondera in eosdem ut 10000, 536, $804\frac{1}{2}$ & $805\frac{1}{2}$, & propterea densitates sunt ut 100, 60, 76, 387. Densitas autem Terræ, quæ hic colligitur, non pendet à Parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quàm Jupiter, & Terra multo densior quàm Sol.

Corol. 5. Planetarum autem densitates inter se fere sunt in ratione composita ex ratione distantiarum à Sole & ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. Nempe Saturni, Jovis, Terræ & Lunæ densitates 60, 76, 387 & 700, fere sunt ut distantiarum reciproca $\frac{1}{9538}$, $\frac{1}{5201}$, $\frac{1}{1000}$ & $\frac{1}{1000}$, ducta in radices diametrorum apparentium 18″, $39''\frac{1}{2}$, 40″, & 11″. Diximus utique, in Corollario secundo, gravitatem ad superficies Planetarum esse quam proximè in ratione dimidiata apparentium diametrorum è Sole visarum; & in Lemmate quarto densitates esse ut gravitates illæ applicatæ ad diametros veras: ideoque densitates fere sunt ut radices diametrorum apparentium applicatæ ad diametros veras, hoc est reciproce ut distantiæ Planetarum à Sole ductæ in radices diametrorum apparentium. Collocavit igitur Deus Planetas in diversis distantiis à Sole, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore fruatur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos: & Ther-

mometro

mometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium verò non eſt quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hac noſtra; cum materia omnis denſior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. IX. Theor. IX.

Gravitatem pergendo à ſuperficiebus Planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quam proximè.

Si materia Planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc Propoſitio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

Prop. X. Theor. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In Scholio Propoſitionis XL. Lib. II. oſtenſum eſt quod globus Aquæ congelatæ in Aere noſtro, liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentia Aeris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3200\cancel{0}}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè (per Prop. XL. Lib. II.) in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò Globum Terræ noſtræ denſiorem eſſe quam ſi totus ex Aqua conſtaret, ſic colligo. Si Globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quàm aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de cauſa Globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio Terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in

regionem

regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores sunt quàm materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aqua constaret; præsertim cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quàm Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic spatio dierum viginti & unius, quibus longitudinem 320 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ vicibus $13\frac{2}{3}$ levior est quàm argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui vicibus 800 levior est quàm aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit.

Prop. XI. Theor. XI.

Commune centrum gravitatis Terræ Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin quartam.

Prop. XII. Theor. XII.

Solem motu perpetuo agitari ſed nunquam longe recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum, per Corol. 3. Prop. VIII. materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1100 ad 1, & diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemediametrum Solis in eadem ratione circiter; commune centrum gravitatis Jovis & Solis incidet fere in ſuperficiem Solis. Eodem argumento cùm materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 2360 ad 1, & diſtantia Saturni à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo minori: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro à centro Solis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cùm Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motûs perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum Solis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modò Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

Prop.

Prop. XIII. Theor. XIII.

Planetæ moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Solis; si Sol quiesceret & Planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in se mutuò perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1100; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni à Jove est ad distantiam Saturni à Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1100 seu 1 ad 217 circiter. Error tamen omnis in motu Saturni circa Solem, à tanta in Jovem gravitate oriundus, evitari fere potest constituendo umbilicum Orbis Saturni in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus est vix superat minutos duos primos. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2360}{25}$ seu 122342, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 122342 seu 1 ad 1867.

Huic

Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores.

Prop. XIV. Theor. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Attamen à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri.

Prop. XV. Theor. XV.

Invenire Orbium transversas diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione sub sesquialtera temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

Prop. XVI. Prob. I.

Invenire Orbium Excentricitates & Aphelia.

Problema consit per Prop. XVIII. Lib. I.

Prop. XVII. Theor. XVI.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam verò Lunæ, circa axem suum uniformiter revolventis, dies menstruus est; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipsius semper respiciet, & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde à Terra. Hæc est libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta est ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porrò hæc ita se habere, ex Phænomenis manifestum est.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

Axes Planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

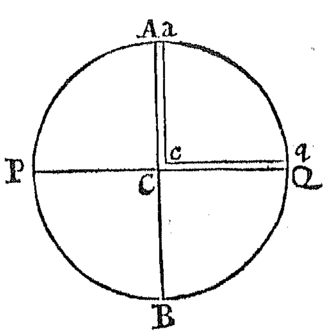
Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus observationibus *Cassini* & *Flamstedii*) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra

par-paulò altior esset sub æquatore quàm ad polos, Maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Ad hujus Problematis solutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quàm præceptis addiscitur. Inito igitur calculo invenio, per Prop. IV. Lib. I. quod vis centrifuga partium Terræ sub æquatore, ex motu diurno oriunda, sit ad vim gravitatis ut 1 ad $290\frac{4}{5}$. Unde si $APBQ$ figuram Terræ designet revolutione Ellipseos circa axem minorem PQ genitam; sitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc, & inde ad æquatorem Aa pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$ esse ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 291 ad 290, eò quòd vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 sustinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure sustinebit partes reliquas. Porrò (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut $126\frac{2}{15}$ ad $125\frac{2}{15}$. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut $125\frac{2}{15}$ ad $126\frac{2}{15}$. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæ-



Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AP, PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est ut 100 ad 101: Conjungantur jam hæ tres rationes, $126\frac{2}{15}$ ad $125\frac{2}{15}$, $125\frac{1}{2}$ ad 126 & 100 ad 101 & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cum per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum à centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 290. Hoc est, vis centripeta quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars $\frac{1}{290}$, & propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ACca$ superet altitudinem aquæ in crure $QCcq$ parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{290}$ faciet ut excessus altitudinis in crure $ACca$ sit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars tantum $\frac{3}{689}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem

ad

ad ipsius diametrum per polos ut 692 ad 689. Ideoque cùm Terræ semidiameter mediocris, juxta nuperam Gallorum mensuram, sit pedum Parisiensium 19615800 seu milliarium 3923 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000;) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos, excessu pedum 85200 seu milliarium 17.

Si Planeta vel major sit vel densior, minorve aut rarior quàm Terra, manente tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur in eadem duplicata ratione. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23, 56′, *Jupiter* autem horis 9, 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, differentia diametrorum *Jovis* erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29 \times 3}{5 \times 689}$ ad 1, seu 1 ad $39\frac{3}{5}$. Est igitur diameter *Jovis* ab oriente in occidentem ducta, ad ipsius diametrum inter polos ut $40\frac{3}{5}$ ad $39\frac{3}{5}$ quam proximè. Hæc ita se habent ex Hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quàm ad circumferentiam, diameter, quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Prop. XX. Prob. III.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est reciprocè ut 692 ad 689. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pon-

pondera sunt reciprocè ut crura, id est reciprocè ut distantiæ corporum à centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut distantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciprocè ut distantiæ locorum à centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis, pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proximè ut Sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est ut quadratum Sinus recti Latitudinis. Exempli gratia, Latitudo *Lutetiæ Parisiorum* est 48 *gr.* 45′: Ea Insulæ *Goree* prope *Cape Verde* 14 *gr.* 15′: ea *Cayennæ* ad littus *Guaianæ* quasi 5 *gr.* ea locorum sub Polo 90 *gr.* Duplorum $97\frac{1}{2}$ *gr.* $28\frac{1}{2}$ *gr.* 10 *gr.* & 180 *gr.* Sinus versi sunt 11305, 1211, 152, & 20000. Proinde cum gravitas in Polo sit ad gravitatem sub Æquatore ut 692 ad 689, & excessus ille gravitatis sub Polo ad gravitatem sub Æquatore ut 3 ad 689; erit excessus gravitatis *Lutetiæ*, in Insula *Goree* & *Cayennæ*, ad gravitatem sub æquatore ut $\frac{3 \times 11305}{20000}$, $\frac{3 \times 1211}{20000}$ & $\frac{3 \times 152}{20000}$ ad 689, seu 33915, 3633, & 456 ad 13780000, & propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 13813915, 13783633, 13780456 & 13780000. Quare cum longitudines Pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & $\frac{17}{24}$ partium digiti; longitudines Pendulorum in Insulâ *Goree*, in illâ *Cayennæ* & sub Æquatore, minutis singulis secundis oscillantium superabuntur à longitudine Penduli Parisiensis excessibus $\frac{81}{1000}$, $\frac{89}{1000}$ & $\frac{90}{1000}$ partium digiti. Hæc omnia ita se habebunt, ex Hypothesi quod Terra ex uniformi materia constat. Nam si materia ad centrum paulò densior sit quàm ad superficiem, excessus illi erunt paulò majores; propterea quod, si materia ad centrum redundans, qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter densam erit reciprocè ut distantia ponderis à centro; in materiam verò redundantem reciprocè ut quadratum distantiæ à materia illa quam proximè. Gravitas igitur sub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quàm pro computo superiore, & propterea Terra ibi propter defectum gravitatis paulò altius ascendet quàm in præcedentibus definitum est. Jam verò Galli factis experimentis invenerunt quod Pendulorum minutis singulis secundis oscillantium longitudo *Parisiis* major sit quàm in Insula *Goree*, parte decima digiti, & major quàm *Cayennæ* parte octava. Paulò majores sunt hæ differentiæ quam differentiæ $\frac{81}{1000}$ & $\frac{89}{1000}$ quæ per computationem superiorem prodiere: & propterea (si crassis hisce Observationibus satis confidendum sit) Terra aliquanto altior erit sub æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem. Si excessus gravitatis in locis hisce Borealibus supra gravitatem ad æquatorem, experimentis majori cum diligentia institutis, accuratè tandem determinetur, deinde excessus ejus ubique sumatur in ratione Sinus versi latitudinis duplicatæ; determinabitur tum Mensura Universalis, tum Æquatio temporis per æqualia pendula in locis diversis indicati, tum etiam proportio diametrorum Terræ ac densitas ejus ad centrum; ex Hypothesi quod densitas illa, pergendo ad circumferentiam, uniformiter decrescat. Quæ quidem Hypothesis, licet accurata non sit, ad ineundum tamen calculum assumi potest.

Prop. XXI. Theor. XVIII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus annuis *nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.*

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

Prop.

Prop. XXII. Theor. XIX.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis Principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna nostra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5 Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvam, atque adeò propius accedit ad Terram, in Syzygiis quàm in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Excentricitatis. Excentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quàm in Quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8 Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quiescunt in Syzygiis suis, & velocissimè regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in Syzygiis: & motus medius velocior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius Aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum observatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeò perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prostaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

Prop. XXIII. Prob. IV.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 9 *gr.* 34′. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujusque in consequentia est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat.

Æqua-

Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respectivè, ut motus Nodorum & Augis Satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ ut sunt toti motus Nodorum temporibus periodicis Satellitis & Lunæ ad invicem, per idem Corollarium, adeoque in Satellite extimo non superat $6''. 22'''$. Parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fit ut motus Satellitum summè regulares reperiantur, utque Astronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut asserant tardissimè retrogradum. Nam *Flamstedius* collatis suis cum *Cassini* Observationibus Nodos tarde regredi deprehendit.

Prop. XXIV. Theor. XX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri debere.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quàm Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium

Con-

Conjunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ à Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ à Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

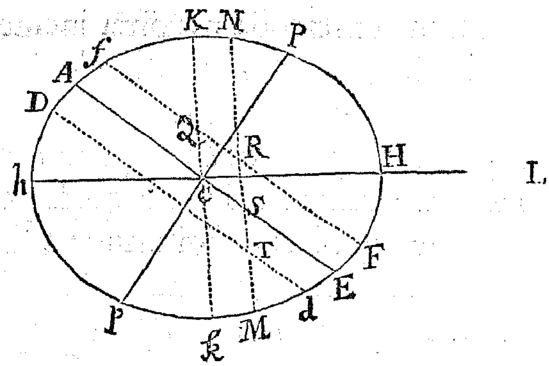
Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantiis à Terra. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensione & remissione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum versus effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus

in

in Syzygiis Solstitialibus quàm in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in Quadraturis Æquinoctialibus; eò quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experientiâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à Terra, tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum quàm sequantur, & sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P p*, polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *F f* parallelum loci; *D d* parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas mensuratas à centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & si axibus *Hh*, *Kk* describatur Ellipsis, deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur Sphærois *HPKhpk*; designabit hæc figuram Maris quam proximè, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam si in præfata Ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibusvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in



revo-

revolutione diurna loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum Lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Distinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemisphæricos, unum in Hemisphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hæmisphærio opposito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuò oppositi veniunt per vices ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Australes magis Australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem. Æstus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & Lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solstitiorum; præsertim si Lunæ Nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experientiâ compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* verò altitudine quindecim digitorum: Observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proximè post Syzygias majores reddit, eosque proximè post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus non sint primi à Syzygiis sed tertii. Retardantur

tur etiam motus omnes in transitu per vada, adeò ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti à Syzygiis.

Porrò fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quàm per alia, quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales à diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquillè stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham*, sub latitudine Boreali 20 *gr.* 50 *min.* *Halleius* ex Nautarum Observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per Æquatorem sequente stagnat, dein Lunâ ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad

 diem

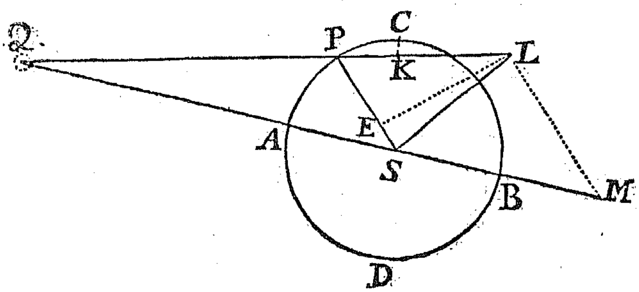
diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter à Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

Prop. XXV. Prob. V.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet Q Solem, S Terram, P Lunam, $PADB$ orbem Lunæ. In QP capiatur QK æqualis QS; ſitque QL ad QK in duplicata ratione QK ad QP, & ipſi PS agatur parallela LM; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam QS vel QK, erit QL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus QM, LM, quarum LM & ipſius QM pars SM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt.



Qua-

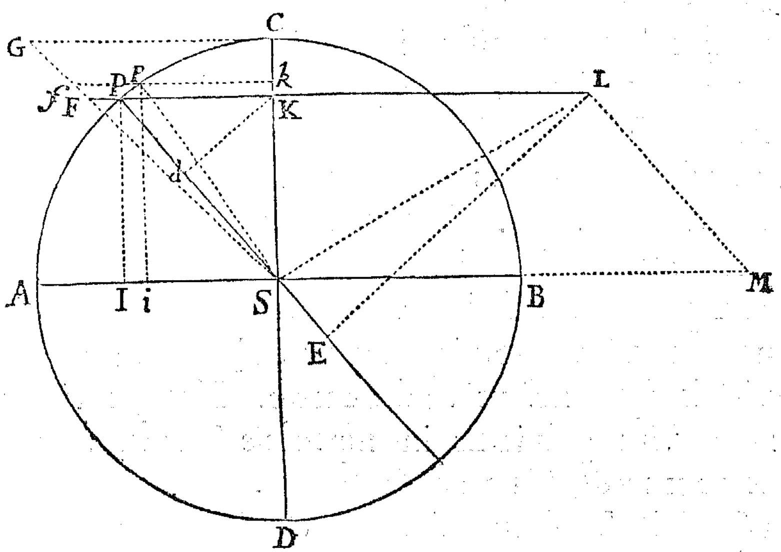
Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur motus Terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas *S M* & *M L* designare. Vis *M L* (in mediocri sua quantitate) est ad vim gravitatis, qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam *P S* revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id est ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{8}{11}$. Vis qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam *P S* semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60. Ideoque vis mediocris *M L* est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{8}{11}$ seu 1 ad 638092,6. Unde ex proportione linearum *S M*, *M L*, datur etiam vis *S M*: & hæ sunt vires Solis quibus motus Lunæ perturbantur. *Q. E. I.*

Prop. XXVI. Prob. VI.

Invenire incrementum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam ponamus etiam lineas *Q P*, *Q S* sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis *L M* reducetur semper ad mediocrem suam

ſuam quantitatem SP, ut & vis SM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim SL; & hæc vis, ſi in radium SP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires SE, EL, quarum SE, agendo ſemper ſecundum radium SP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ QSP



radio illo SP factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius à Quadratura C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt ut $\frac{3PK \times SK}{SP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CSP, vel etiam per arcum CP. Ad CS erigatur Normalis CG ipſi CS æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductâque pk perpendiculari ad CS, jungatur SG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit Kk ad PK ut Pp ad Sp, hoc eſt in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times SK}{SP}$ id eſt ut EL; & compoſitè, area tota $GCKF$ ut ſum-

ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in Lunam, atque adeò etiam ut velocitas hac ſummâ genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CSP, ſeu incrementum momenti. Vis quâ Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam SP, tempore ſuo periodico $CADBC$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore CS cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CS$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per Schol. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in SP demiſſum ſit ipſius EL pars tertia, & ipſius SP ſeu ML in octantibus pars dimidia, vis EL in Octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim ML in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore CS velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CS ſeu SP. Exponatur vis maxima EL in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}SP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat ut rectangulum $\frac{1}{2}SP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}SP \times CA$ & triangulum SCG, ſive ut arcus quadrantalis CA ad radium SP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915 ſumma 11915 + 50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A, ac differentia 11915 — 50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium $FKCG$ ad triangulum

SCG (vel quod perinde eſt, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii SP, id eſt ut Pd ad SP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris verè ſit dierum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut $11023 - 50$ ad $11023 + 50$, ſeu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P verſatur, ut 10973 ad $10973 + Pd$, exiſtente videlicet SP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proximè ut ſumma numeri $219\frac{46}{100}$ & Sinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadratura proxima, in circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi Variatio in Octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille verſus in eadem ratione.

Prop. XXVII. Prob. VII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, ſingulis temporis momentis, deſcribit, eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea diſtantia Lunæ à Terrâ eſt in ratione compoſitâ ex dimidiatâ ratione Areæ directè & dimidiatâ ratione motus horarii inverſè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciprocè ut ipſius diſtantia à Terra. Tentent Aſtronomi quàm probè hæc Regula cum Phænomenis congruat.

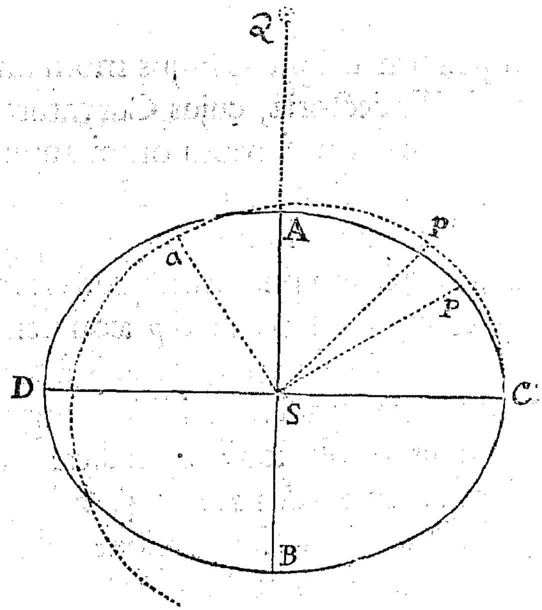
Corol.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratiùs ex Phænomenis quàm antehac definiri potest.

Prop. XXVIII. Prob. VIII.

Invenire diametros Orbis in quo Luna absque excentricitate moveri deberet.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem $2\,PK$ (Vide *Figur. pag.* 434.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris KS, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AS+CS}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{AS\,q.} - \frac{2000}{CS \times N}$ & $\frac{178725}{CS\,q.} + \frac{1000}{AS \times N}$ quam proxime; seu ut $178725\,N$ in $CS\,q. - 2000\,AS\,q.$ in CS, & $178725\,N$ in $AS\,q. + 1000\,CS\,q. \times AS$. Nam si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in Quadraturis est PS vel



vel SK & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris SM in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur à Terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in Quadraturis C & D ut CS, ad AS & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; id est ut $11073 CS$ ad $10973 AS$. Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet Curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem Curvaturam in Quadraturis ut $120407 \times 178725\, ASq. \times CSq. \times N - 120407 \times 2000\, ASqq. \times CS$ ad $122611 \times 178725\, ASq. \times CSq. \times N + 122611 \times 1000\, CSqq. \times AS$, id est ut $2151969\, AS \times CS \times N - 24081\, AS\, cub.$ ad $2191371\, AS \times CS \times N + 12261\, CS\, cub.$

Quoniam figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro S Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria, cujus Curvaturam consideramus, describi debet in plano quod motu omni angulari omnino destituitur: considerandа erit figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura Cpa, cujus puncta singula p inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipsi, quod locum Lunæ representet, & ducendo Sp æqualem SP, ea lege ut angulus PSp æqualis sit motui apparenti Solis à tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CSp sit ad angulum CSP ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu $29\,d.\ 12.\,h.\ 44'$, ad $27\,d.\ 7\,h.\ 43'$. Capiatur igitur angulus CSa in eadem ratione ad angulum rectum CSA, & sit longitudo Sa æqualis longitudini SA; & erit a Apsis ima & C Apsis summa orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis Cpa in vertice a, & curvaturam circuli centro S intervallo SA descripti, sit ad differentiam inter

curva-

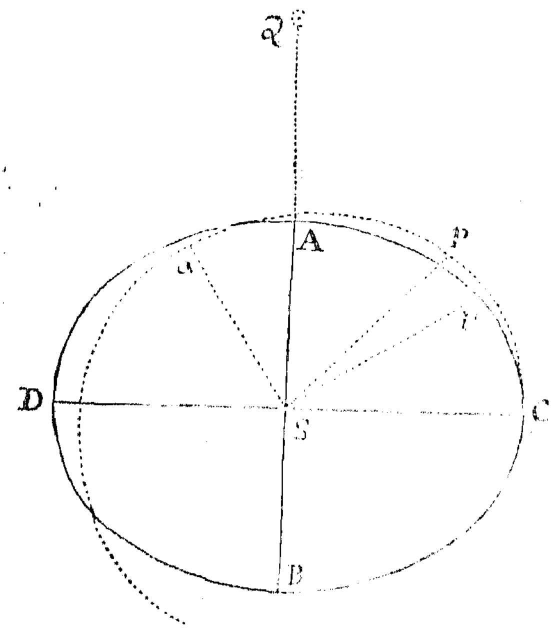
curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli $CS\mathcal{P}$ ad angulum CSp; & quod curvatura Ellipseos in A sit ad curvaturam circuli illius in duplicata ratione SA ad SC; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro S intervallo SC descripti ut SC ad SA; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in C in duplicata ratione SA ad SC; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice C & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ Spa in vertice C & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli $CS\mathcal{P}$ ad angulum CSp. Quæ quidem rationes ex Sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. Collatis autem his rationibus inter se, prodit curvatura figuræ Cpa in a ad ipsius curvaturam in C, ut $AS\,cub. + \frac{16824}{100000}CS\,q. \times AS$ ad $CS\,cub. + \frac{16824}{100000}AS\,q. \times CS$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum $CS\mathcal{P}$ & CSp applicatam ad Quadratum anguli minoris $CS\mathcal{P}$, seu (quod perinde est) differentiam Quadratorum temporum 27 *d.* 7 *h.* 43′, & 29 *d.* 12 *h.* 44′, applicatam ad Quadratum temporis 27 *d.* 7 *h.* 43′.

Igitur cum a designet Syzygiam Lunæ, & C ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CS ad AS, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AS \times CS$ applicati, fiunt $2062,79\,CS\,qq. - 2151969\,N \times CS\,cub. + 368682\,N \times AS \times CS\,q. + 36342\,AS\,q. \times CS\,q. - 362046\,N \times AS\,q. \times CS + 2191371\,N \times AS\,cub. + 4051,4\,AS\,qq. = 0.$ Hic pro terminorum AS & CS semisummâ N scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo x, fit $CS = 1 + x$, & $AS = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur x æqualis 0,0072036, & inde semidiameter CS fit 1,0072, & semidiameter AS 0,9928, qui numeri sunt ut $69\frac{11}{12}$ & $68\frac{11}{12}$ quam proximè. Est igitur distantia Lunæ à Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (seposita scilicet excentricitatis consideratione) ut $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

Prop. XXIX. Prob. IX.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna *P* in Ellipsi *DBCA* circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio *SP* ad Terram ducto describeret aream *CSP* tempori proportionalem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima *CS* ad semidiametrum minimam *SA* ut $69\frac{11}{12}$ ad $68\frac{11}{12}$: foret Tangens anguli *CSP* ad Tangentem anguli motus medii à quadratura *C* computati, ut Ellipseos semidiameter *SA* ad ejusdem semidiametrum *SC* seu $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$. Debet autem descriptio areæ *CSP*, in progressu Lunæ à Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utq; excessus momenti in loco quovis intermedio *P* supra momentum in Quadratura sit ut quadratum Sinus anguli *CSP*. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli *CSP* diminuatur in dimidiata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est in ratione numeri $68\frac{6877}{10000}$ ad numerum $68\frac{11}{12}$. Quo pacto tangens anguli *CSP* jam erit ad tangentem motus medii ut $68\frac{6877}{10000}$ ad $69\frac{11}{12}$, & angulus *CSP*



in

in Octantibus, ubi motus medius est 45 *gr.* invenietur 44 *gr.* 27′. 29″: qui subductus de angulo motus medii 45 *gr.* relinquit Variationem 32′. 31″. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo à Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum *CSA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in antecedentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum *CSa* angulo recto majorem in ratione revolutionis Lunaris Synodicæ ad revolutionem periodicam, id est in ratione 29 *d.* 12 *h.* 44′. ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum S dilatantur in eadem ratione, & Variatio quæ secus esset 32′. 31″. jam aucta in eadem ratione, fit 35′. 9″. Hæc ab Astronomis constituitur 40′, & ex recentioribus Observationibus 38′. *Halleius* autem recentissimè deprehendit esse 38′ in Octantibus versus oppositionem Solis, & 32′ in Octantibus Solem versus. Unde mediocris ejus magnitudo erit 35′: quæ cum magnitudine à nobis inventa 35′. 9″ probe congruit. Magnitudinem enim mediocrem computavimus, neglectis differentiis, quæ à curvaturâ Orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in Gibbosam & plenam, oriri possint.

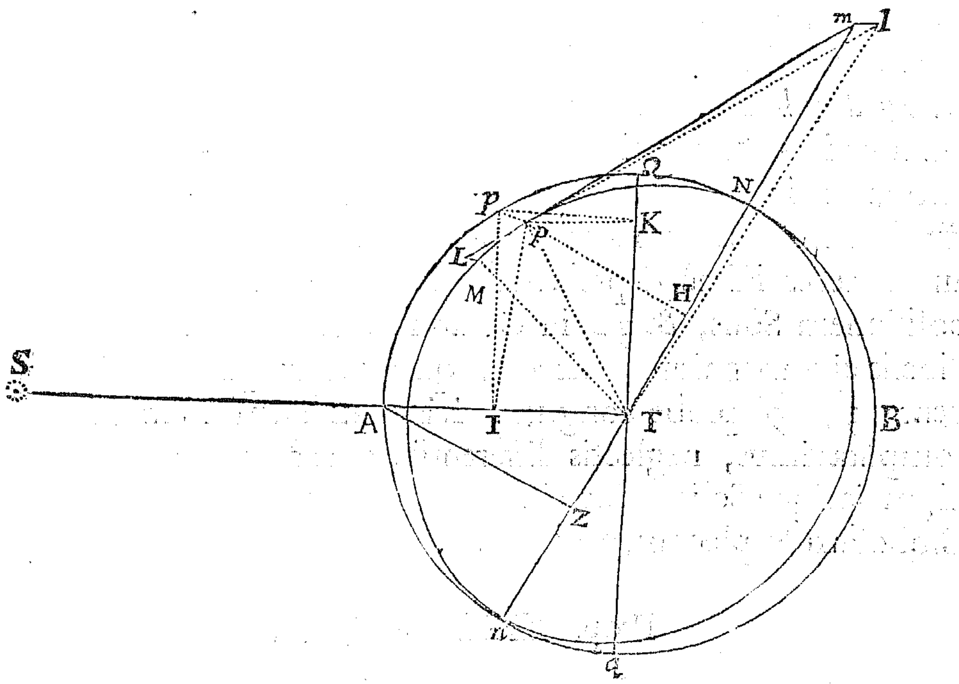
Prop. XXX. Prob. X.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

Designet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* vestigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n*, Nodos, *nTNm* lineam Nodorum infinitè productam, *PI*, *PK*; perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum Eclipticæ; *Q*, *q* Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* Quadraturis intrajacentem. Et vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex erit, altera lineæ 2 *IT* vel 2 *Kp*, altera lineæ *PI* proportionalis. Et Luna vi priore in Solem, posteriore in lineam *ST* trahitur.

 Com-

Componitur autem vis posterior PI ex viribus IT & PT, quarum PT agit secundum planum orbis Lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis autem IT cum vi $2\,IT$ componit vim totam $3\,IT$, qua planum Orbis Lunaris perturbatur. Et hæc vis per Prop. XXV. est ad vim qua Luna in



circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico revolvi posset, ut $3\,IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut IT ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

De-

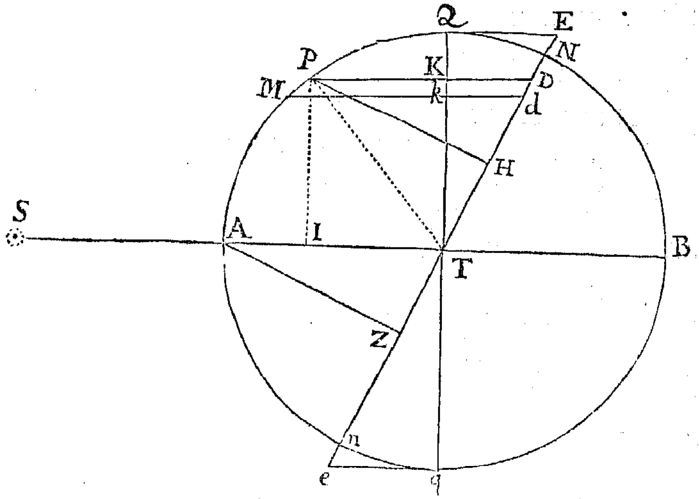
Designet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata $3\,IT$, eodem tempore describere posset. Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad m & l, ubi secent planum Eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam ML parallela est ipsi ST, si ml parallela sit ipsi ML, erit ml in plano Eclipticæ, & contra. Ergo ml, cum sit in plano Eclipticæ, parallela erit ipsi ML, & similia erunt triangula LMP, Lmp. Jam cum MPm sit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n, ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus Chorda esset LP, atque adeò transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus Nodorum à vi illa genitus æqualis erit angulo mTl. Est autem ml ad mP ut ML ad MP, adeoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, si modo angulus Tml rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$ id est (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml, seu STN obliquus sit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione Sinus anguli STN ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH$ & Sinus anguli STN conjunctim, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM, quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis est angulo LPM, id est angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quam præfata vis Solaris $3\,IT$ dato illo tempore generare possit; & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis

Lunæ

Lunæ à recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, eodem tempore generat. Et hæ vires, uti supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (respectu fixarum) sit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc casu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum sub sinibus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (seu distantiarum Lunæ à Quadratura, Lunæ à Nodo & Nodi à Sole) ad cubum Radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec secent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres Sinus. Nempe *PK* Sinus distantiæ Lunæ à Quadratura,



PH Sinus distantiæ Lunæ à Nodo, & *AZ* Sinus distantiæ Nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum *PK* x *PH* x *AZ*. Est autem

autem PT ad PK ut PM ad Kk, adeoque ob datas PT & PM eſt Kk ipſi PK proportionalis. Eſt & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ eſt ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id eſt ut area $PDdM$, & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In data quavis Nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque eſt ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut quadratum Sinus diſtantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii, ſive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam ſi Luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum QAq, ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit à Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n, ſumma illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD deſcribit; dein Luna pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam deſcribet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, ſubduci debet de area priore, & cum æqualis ſit areæ QEN, relinquet ſemicirculum $NQAn$. Igitur ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore Luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna verſatur in Syzygiis, eſt rectangulum ſub arcu PM & radio MT; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quàm rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in Syzygiis Lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quàm revera deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium à ſe inæquabili cum motu revera confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, ſi Nodi in Quadraturis verſantur, ſit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc caſu erit

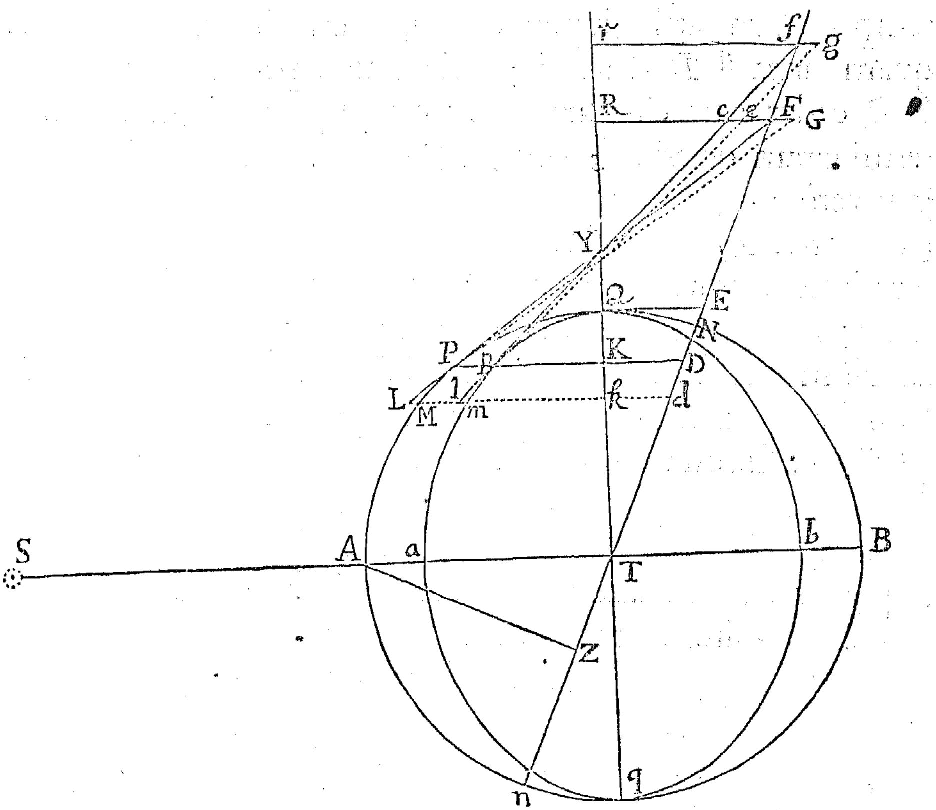
16''.

$16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id est (ob datam aream *PDdM* in Syzygiis descriptam) ut *AZ qu.* erit etiam motus mediocris ut *AZ qu.* atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q.E.D.*

Prop. XXXI. Prob. XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Designet *Qpmaq* Ellipsim, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAq* circulum circumscriptum, *T* Terram in utriusque



centro communi, *S* Solem, *p* Lunam in Ellipsi moventem, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima describit, *N* & *n* Nodos

Nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendicula in axem Qq demiſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ Nodorum in D & d. Et ſi Luna, radio ad Terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipſi ut area $\cancel{pKkm}$, $pDdm$.

Nam ſi PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F, & pf tangat Ellipſin in p & producta occurrat eidem TN in f, conveniant autem hæ Tangentes in axe TQ ad Y; & ſi ML deſignet ſpatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu tranſverſo deſcribere poſſet, & ml deſignet ſpatium quod Luna in Ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, deſcribere poſſet; & producantur LP & lp donec occurrant plano Eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta ſecet pf, pg & TQ in c, e & R reſpectivè, & fg producta ſecet TQ in r: Quoniam vis $3IT$ ſeu $3PK$ in circulo eſt ad vim $3IT$ ſeu $3pK$ in Ellipſi, ut PK ad pK, ſeu AT ad aT; erit ſpatium ML vi priore genitum, ad ſpatium ml vi poſteriore genitum, ut PK ad pK, id eſt ob ſimiles figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc eſt (ob parallelas Lk, PK, GR) ut pl ad pe, id eſt (ob ſimilia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inversè ut LM eſt ad lm, ſeu FR ad cR, ita eſt FG ad ce. Et propterea ſi fg eſſet ad ce ut fY ad cY, id eſt ut fr ad cR, (hoc eſt ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id eſt ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; propterea quod anguli, quos FG & fg ſubtenderent ad Terram T, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus Nodorum, quo tempore Luna in circulo arcum PM, in Ellipſi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modo fg eſſet ad ce ut fY ad cY,

Ggg id

id est si fg æqualis esset $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$. Verum ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$, & propterea angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est motus Nodorum in Ellipsi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$, id est ut $fp \times c\Upsilon$ ad $cp \times f\Upsilon$, seu fp ad $f\Upsilon$ & $c\Upsilon$ ad cp; hoc est, si pb ipsi TN parallela occurrat FP in b, ut Fb ad $F\Upsilon$ & $F\Upsilon$ ad FP; hoc est ut Fb ad FP seu Dp ad DP, adeoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum $pDdm$, quo tempore Luna pergit à Quadratura ad locum quemvis m, sit area $mpQEd$, quæ ad Ellipseos Tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem Nodorum in circulo, ut Ellipsis ad circulum, id est ut Ta ad TA, seu $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in circulo sit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut $AZ\,qu.$ ad $AT\,qu.$ si capiatur angulus $16''. 21'''. 2^{iv}. 36^{v}$. ad angulum $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut $68\frac{11}{12}$ ad $69\frac{11}{12}$, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipsi ad $16''. 21'''. 2^{iv}. 36^{v}$. ut AZq. ad ATq.; hoc est ut quadratum Sinus distantiæ Nodi à Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quàm in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50.

Unde

Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadrantibus, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem à Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadrantibus quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadraturis & quadratum Sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna percurrit *PM*, (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quam proximè. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadratura & semissem quadrati Radii ad semissem quadrati Radii, conjunctim. Unde si Nodi in Quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo à Syzygiâ & Quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facilè conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur) erat $32''. 42'''. 5^{iv}. 12^{v}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud eſt $17'''. 43^{iv}. 10^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$, motui horario mediocri ſuperius invento $16''. 21'''. 2^{iv}. 36^{v}$. ſubducta, relinquit $16''. 16'''. 36^{iv}. 48^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

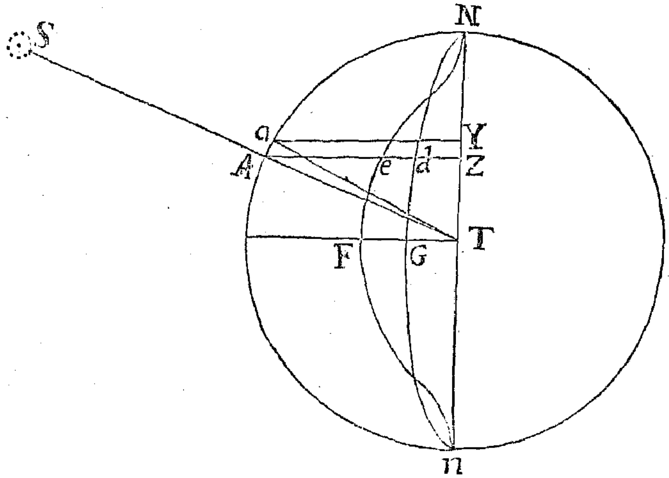
Si Nodi verſantur extra Quadraturas, & ſpectentur loca bina à Syzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum Nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi Luna in iiſdem locis & Nodi in Quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, à cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum ſitu, ad $16''. 16'''. 36^{iv}. 48^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt ut quadratum Sinus diſtantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii.

Prop. XXXII. Prob. XII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea verò Solem *S*, per motum Terræ, progredi à Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem ſemper ducta, inter-

interſectione ſua & circuli NAn, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZq. id eſt (ob proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt ut area $AZYa$. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum $aYZA$, id eſt ut area NAZ. Eſt autem maxima $AZYa$ æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat $16''. 16'''. 36^{iv}. 48^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. 6 *hor.* 9 *min.* fit 39 *gr.* $38'. 5''. 39'''$. Ideoque hujus dimidium 19 *gr.* $49'. 2''. 49'''\frac{1}{2}$ eſt motus medius Nodorum circulo toti reſpondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A, eſt ad 19 *gr.* $49'. 2''. 49'''\frac{1}{2}$ ut area NAZ ad circulum totum.



Hæc ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39 *gr.* $38'. 5''. 39'''$ ſeu 39,6349 gradus; & motus mediocris Nodi

in

in loco quovis N sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut AZq. ad ATq. erit motus Solis ad motum Nodi in N, ut 360 ATq. ad 39,6349 AZq.; id est ut 9,0829032 ATq. ad AZq. Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo Sol percurrat particulam Aa, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0829032 ATq. ad 9,0829032 $ATq. + AZq$. Nam tempus est reciprocè ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum NA, exponatur per Sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa, exponatur per Sectoris particulam ATa; & (perpendiculo aY in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis ut sit rectangulum dZ in ZY ad Sectoris particulam ATa ut AZq. ad 9,0829032 $ATq. + AZq$. id est ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut ATq. ad 9,0829032 $ATq. + AZq$.; rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus Sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq. ad 9,0829032 $ATq. + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum, quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum e tangat curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus

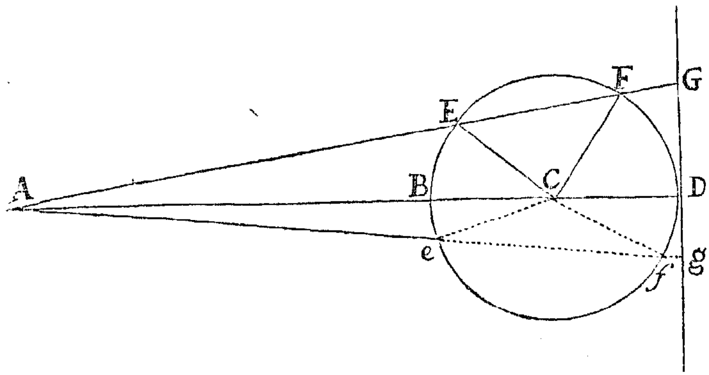
totus

totus NA, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò si circuli radius AT ponatur 1, erit area semicirculi 1,570796; & area figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæsita, prodibit 0,1188478. Motus autem qui respondet circulo toti erat 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½; & propterea motus, qui figuræ $NeFnT$ duplicatæ respondet, est 1 *gr.* 29′. 57″. 51‴½. Qui de motu priore subductus relinquit 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit 341 *gr.* 40′. 55″. 2‴. motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360 *gr.* ut Nodi motus jam inventus 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. Hic est motus medius Nodorum in anno sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est 19 *gr.* 20′. 31″. 1‴. Differentia minor est parte quadringentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Excentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Excentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

Prop. XXXIII. Prob. XIII.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, (*in Fig. præced.*) motus iste est ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, describatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut sit AB ad AC ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis: (id est ut 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, atque adeo BC ad AC ut motuum differentia 0 *gr.* 31′. 2″. 27‴½, ad motum ~~superiorem~~ post superiorem 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, hoc est, ut 1 ad ad 38'.) dein per punctum *D* ducatur infinita *Gg*, quæ tangat circulum in *D*; & si capiatur angulus *BCE* vel *BCF* æqualis semissi



distantiæ Solis à loco Nodi, per motum medium invento; & agatur *AE* vel *AF* secans perpendiculum *DG* in *G*; & capiatur angulus qui sit ad motum Nodi inter ipsius Syzygias (id est ad 9 *gr*. 10'. 40''.) ut tangens *DG* ad circuli *BED* circumferentiam totam, atque angulus iste ad motum medium Nodorum addatur; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA* — *NdZ*, & motum Nodi per aream *NAeN*; ut rem perpendenti constabit. Hæc est æquatio annua motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minimè necessaria est. Nam cum Variatio inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri annuæ, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

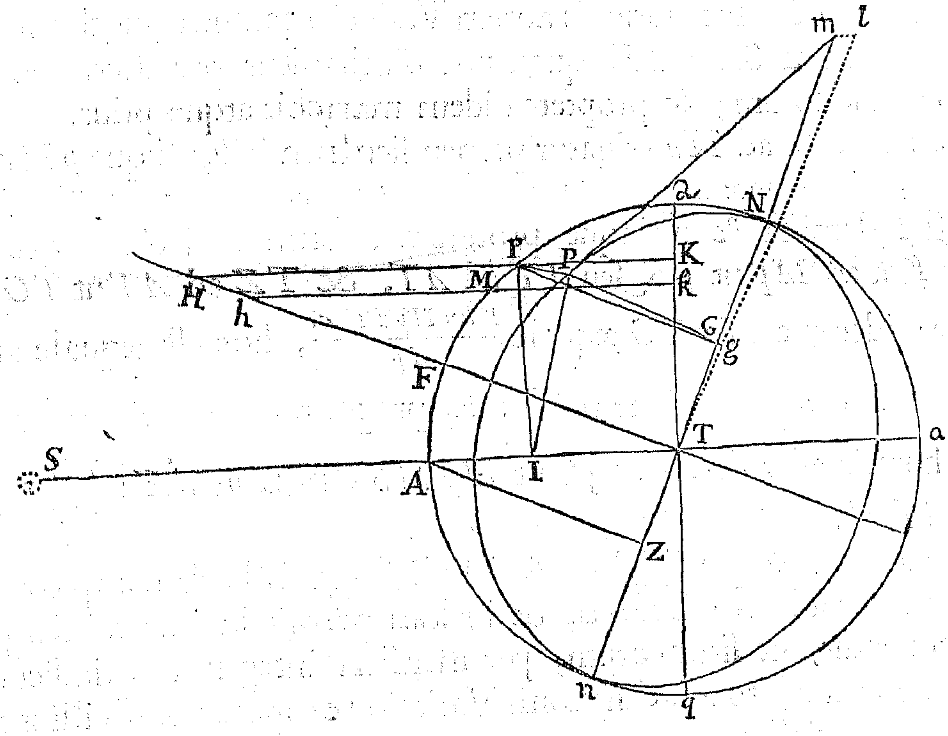
Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario 16''. 18'''. $41^{iv}\frac{1}{2}$. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit 1 *gr*. 30'. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Prop.

Prop. XXXIV. Prob. XIV.

Invenire Variationem horariam inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Designent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe suo; *p* vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*,



& producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna versatur in *P*; & angulus *Pgp* inclinatio ejusdem post momentum temporis completum, adeoque angulus *GPg* Variatio mo-

momentanea inclinationis. Est autem hic angulus $G\mathfrak{P}g$ ad angulum GTg ut TG ad $\mathfrak{P}G$ & $\mathfrak{P}p$ ad $\mathfrak{P}G$ conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per Prop. XXX.) sit ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $IT \times \mathfrak{P}G \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus $G\mathfrak{P}g$ (seu inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *Q. E. I.*

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Sinus IT. Inclinationis autem Variatio tantum augebitur per decrementum Sinus IT, quantum diminuitur per decrementum motus Nodorum; & propterea idem manebit atque prius.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, sitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit Kk ad Mp ut pK seu IT ad AT, & TZ ad AT ut TG ad Hp; ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc est æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis Variatio horaria ad $33''. 10'''. 33^{v}.$ ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad $33''. 10'''. 33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genetarum, & sub signis propriis $+$ & $-$ conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$, ad $Mp \times AT$ *cub.* id est ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.*

cub. hoc est ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT\,quad.$

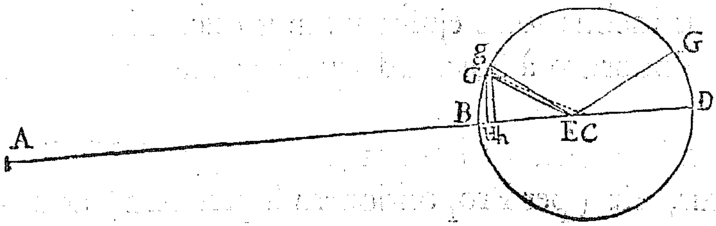
Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuatâ Variatio illa menstrua generari posset, est ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,ATq$. id est (cum Pp sit ad PG ut Sinus Inclinationis prædictæ ad Radium, & $\frac{AZ \times TZ}{AT}$ sit ad $\frac{1}{2}AT$ ut sinus duplicati anguli ATn ad Radium) ut inclinationis ejusdem Sinus ductus in Sinum duplicatæ distantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per Propositionem superiorem) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub.$ id est ut $\frac{IT \times TG}{AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT; hoc est ut Sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}. seu 5878‴$\frac{1}{2}$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$, ad circumferentiam; id est si inclinatio sit 5 *gr.* 2′, ut $7 \times \frac{876}{10000}$ ad 22, seu 279 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est 164″, seu 2′. 44″.

Prop. XXXV. Prob. XV.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Sit AD Sinus inclinationis maximæ, & AB Sinus Inclinationis minimæ. Biſecetur BD in C, & centro C, intervallo BC, deſcribatur Circulus BGD. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$: Et ſi dato tempore



conſtituatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH Sinus inclinationis quæſitæ.

Nam $GEq.$ æquale eſt $GHq. + HEq. = BHD + HEq. = HBD + HEq. - BHq. = HBD + BEq. - 2BH \times BE = BEq. + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt $GEq.$ ut AH. Deſignet jam AEg diſtantiam Nodorum à Quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg, ob datum angulum GEg, erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$ ſeu $GH \times GE$; id eſt ut $\frac{GH}{GE} \times GE\,qu.$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit Sinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D huic Sinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In

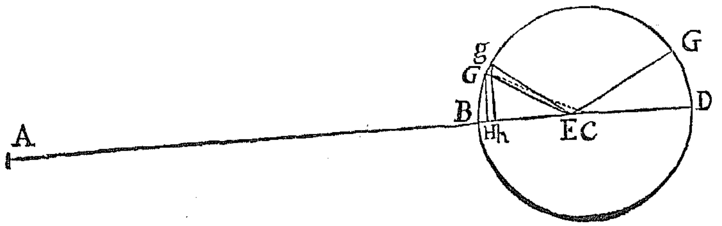
In hac demonstratione suppofui angulum *BEG*, qui distantia est Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum *BEG* rectum esse, & *Gg* esse augmentum horarium distantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & inclinationis Variatio horaria (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut contentum sub inclinationis Sinu *AH* & Sinu anguli recti *BEG*, qui est duplicata distantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii; id est ut mediocris inclinationis Sinus *AH* ad radium quadruplicatum; hoc est (cum inclinatio illa mediocris sit quasi 5 *gr.* $8\frac{1}{2}$′) ut ejus Sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem Variatio tota, Sinuum differentiæ *BD* respondens, ad variationem illam horariam ut diameter *BD* ad arcum *Gg*; id est ut diameter *BD* ad semicircumferentiam *BGD* & tempus horarum 2080, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est ut 7 ad 11 & 2080 ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota *BD* ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut 224 x 7 x 2080 ad 110000, id est ut 2965 ad 100, & inde Variatio illa *BD* prodibit 16′. 24″.

Hæc est inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, inclinatio major est ubi Luna versatur in Syzygiis, quàm ubi ea versatur in Quadraturis, excessu 2′. 44″; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio 1′. 22″ Variatio tota mediocris *BD* in Quadraturis Lunaribus diminuta fit 15′. 2″, in ipsius autem Syzygiis aucta fit 17′. 46″. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit 17′. 46″. adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit 5 *gr.* 17′. 46″. eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 5 *gr.* Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus. Nam statuunt Astronomi Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclip-

ticæ,

ticæ, ubi Nodi ſunt in Quadraturis & Luna in oppoſitione Solis, eſſe quaſi 5 *gr.* Ubi verò Nodi ſunt in Syzygiis, eandem docent eſſe 5 *gr.* 17′½ vel 5 *gr.* 18′.

Si jam deſideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis verſantur; fiat *AB* ad *AD* ut Sinus 5 *gr.* ad Sinum 5 *gr.* 17′. 46″, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit *AH* Sinus Inclinationis quæſitæ.



Huic Orbis Inclinationi æqualis eſt ejuſdem Inclinatio, ubi Luna diſtat 90 *gr.* à Nodis. Aliis in Lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus Nodorum, (ut ſupra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi poteſt.

Scholium.

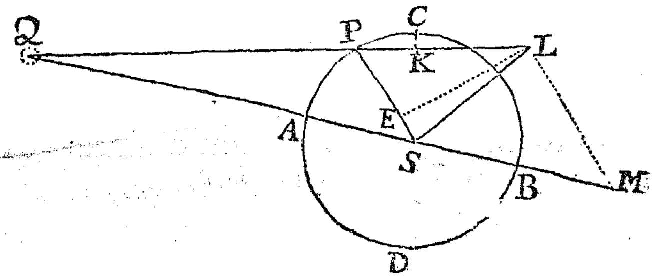
Hactenus de motibus Lunæ quatenus Excentricitas Orbis non conſideratur. Similibus computationibus inveni, quod Apogæum, ubi in Conjunctione vel Oppoſitione Solis verſatur, progreditur ſingulis diebus 23′ reſpectu Fixarum; ubi verò in Quadraturis eſt, regreditur ſingulis diebus 16′⅓ circiter: quodque ipſius motus medius annuus ſit quaſi 40 *gr.* Per Tabulas Aſtronomicas à *Cl. Flamſtedio* ad Hypotheſin *Horroxii* accommodatas, Apogæum in ipſius Syzygiis progreditur cum motu diurno 24′. 28″, in Quadraturis autem regreditur cum motu diurno 20′. 12″, & motu medio annuo 40 *gr.* 41′ fertur in conſequentia. Quod differentia inter motum diurnum progreſſivum Apogæi in ipſius Syzygiis, & motum diurnum regreſſivum in ipſius Quadraturis, per Tabulas ſit 4′. 16″, per computationem verò noſtram 6′⅔, vitio Tabularum tribuendum eſſe ſuſpi-

suspicamur. Sed neque computationem nostram satis accuratam esse putamus. Nam rationem quandam ineundo prodiere Apogæi motus diurnus progressivus in ipsius Syzygiis, & motus diurnus regressivus in ipsius Quadraturis, paulo majores. Computationes autem, ut nimis perplexas & approximationibus impeditas, neque satis accuratas, apponere non lubet.

Prop. XXXVI. Prob. XVI.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML seu PS, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 638092,6. Et vis $SM - LM$ seu $2PK$ in Syzygiis Lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum à centro Terræ, id est in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in superficie Terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 *gr.* distant à Sole. Vi alterâ quæ duplo major est Mare elevatur, & sub Sole & in regione Soli opposita. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 *gr.* distant à Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac si tota in regionibus sub Sole & Soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 *gr.* distant à Sole nil ageret.



Corol.

Corol. Hinc cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 291, efficiat ut altitudo Aquæ sub Æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum Parisiensium 85200, vis Solaris, de qua egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12868200 seu 1 ad 44221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus distant à Sole, mensura tantum pedis unius Parisiensis & digitorum undecim. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85200 ut 1 ad 44221.

Prop. XXXVII. Prob. XVII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ*, ad lapidem tertium infra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in Conjunctione & Oppositione Luminarium (observante *Samuele Sturmio*) est pedum plus minus 45, in Quadraturis autem est pedum tantum 25: Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore versantium & mediocriter à Terra distantium, sunto vires S & L. Et quoniam Luna in Quadraturis, tempore verno & autumnali extra Æquatorem in declinatione graduum plus minus $23\frac{1}{2}$ versatur, & Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad mare movendum minor sit, idque (quantum sentio) in duplicata ratione Sinus complementi declinationis quam proximè, vis Lunæ in Quadraturis, (cum sinus ille sit ad radium ut 91706 ad 100000) erit $\frac{841}{1000}L$, & summa virium in Syzygiis erit $L+S$, ac differentia in Quadraturis $\frac{841}{1000}L-S$, adeoque $L+S$ erit ad $\frac{841}{1000}L-S$ ut 45 ad 25 seu 9 ad 5, & inde $5L+5S$ æqualis erit $\frac{7569}{1000}L-9S$, &

14 S

$14S$ æqualis $\frac{2569}{1000}L$, & propterea L ad S ut 14000 ad 2569 seu $5\frac{7}{15}$ ad 1. In Portu *Plymuthi* æstus maris (ex observatione *Samuelis Colepressi*) ad pedes plus minus sexdecim, altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æstus in Syzygiis Lunæ superare potest altitudinem ejus in Quadraturis pedibus septem vel octo. Si excessus mediocris his temporibus sit pedum septem cum dimidio; æstus in Syzygiis ascendet ad pedes $19\frac{3}{4}$, in Quadraturis ad pedes $12\frac{1}{4}$, & sic $L+S$ erit ad $\frac{841}{1000}L-S$ ut $19\frac{3}{4}$ ad $12\frac{1}{4}$, & inde L ad S ut 734 ad 100 seu $7\frac{1}{3}$ ad 1. Est igitur vis Lunæ ad vim Solis per computationem priorem ut $5\frac{7}{15}$ ad 1, per posteriorem ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Donec aliquid certius ex Observationibus accuratius institutis constiterit, usurpabimus proportionem mediocrem $6\frac{1}{3}$ ad 1. Unde cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821.

Corol. 1. Igitur cum aqua vi Solis agitata ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum ascendat, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem pedum duodecim. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem latè patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, ascensus aquæ intra Tropicos minor est quàm in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africam* & Australem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit ascendere nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in Insulis, quæ à littoribus longissimè absunt, perexiguus esse solet. In Portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus sunt solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa Milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40 vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quàm quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut $6\frac{1}{3}$ ad 1, & vires illæ sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; erit densitas Lunæ ad densitatem Solis ut $6\frac{1}{3}$ ad 1 directè & cubus diametri Solis ad cubum diametri Lunæ inversè, id est (cum diametri mediocres apparentes Solis & Lunæ sint 31′. 27″. & 32′. 12″.) ut 34 ad 5. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 100 ad 387, & propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 680 ad 387, seu 9 ad 5 quam proximè. Est igitur corpus Lunæ densius & magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Unde cum vera diameter Lunæ sit ad veram diametrum Terræ ut 1 ad $3,6\frac{1}{2}$, erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 26 quam proximè.

Corol.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi duplo minor quàm gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Prop. XXXVIII. Prob. XVIII.

Invenire figuram corporis Lunæ.

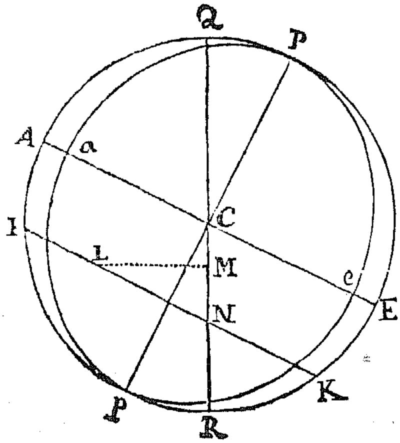
Si corpus Lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet ad vim Lunæ, qua mare noſtrum in partibus & ſub Luna & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id eſt ut 26 ad 1 & 5 ad 18 conjunctim ſeu 65 ad 9. Unde cum mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes duodecim, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere nonaginta. Eaque de cauſa figura Lunæ Sphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum Terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde verò fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes ob parvitatem virium agitantium eſſent longè tardiſſimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem ſuperius allatam reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in Terram converti.

Lemma I.

Si A P E p *Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *&* *polis* P, p *& æquatore* A E *delineatam; & ſi centro* C *radio* C P *deſcribi intelligatur ſphæra* Pape; *ſit autem* Q R *planum, cui recta à centro*

tro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terræ totius exterioris PapAPepE, *quæ Sphærâ modò descriptâ altior est, particulæ singulæ conantur recedere hinc inde à plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: erit vis & efficacia tota particularum omnium, ad Terram circulariter movendam, quadruplo minor quàm vis tota particularum totidem in Æquatoris circulo* AE, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam. Et motus iste circularis circa axem in plano* QR *jacentem, & axi* Pp *perpendiculariter insistentem, peragetur.*



Sit enim *IK* circulus minor Æquatori *AE* parallelus, sitque *L* particula Terræ in circulo illo extra globum *Pape* sita. Et si in planum *QR* demittatur perpendiculum *LM*, vis tota particulæ illius ad Terram circa ipsius centrum convertendum proportionalis erit eidem *LM*: & si hæc vis *LM* (per Legum Corol. 2.) distinguatur in vires *LN*, *NM*; efficacia virium *MN* particularum omnium *L*, in circuitu Terræ totius extra globum *Pape* consistentium, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem literarum *ApEP* convertendam, erit ad efficaciam virium *LN* particularum omnium *L*, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem contrarium earundem literarum convertendam, ut tria ad duo. Ideoque efficacia virium omnium *MN* erit ad excessum efficaciæ hujus supra efficaciam virium omnium *LN* ut tria ad unum. Et si particulæ illæ omnes locarentur in Æquatore, efficacia virium omnium *LN* evanesceret, & efficacia virium omnium *MN* augeretur in ratione quatuor ad tria. Quare excessus ille, qui est efficacia absoluta particularum in locis propriis, est pars quarta efficaciæ particularum earundem in Æquatore. Motus autem æquinoctiorum

ctiorum est ut hæc efficacia. Singula examinet qui volet. Brevitati consulo.

Lemma II.

Motus autem Terræ totius circa axem illum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli circa axem eundem, in ratione composita ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque, ad duo quadrata ex diametro; id est in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 & 1000000.

Est enim motus Cylindri circa axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circa axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circa diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

Lemma III.

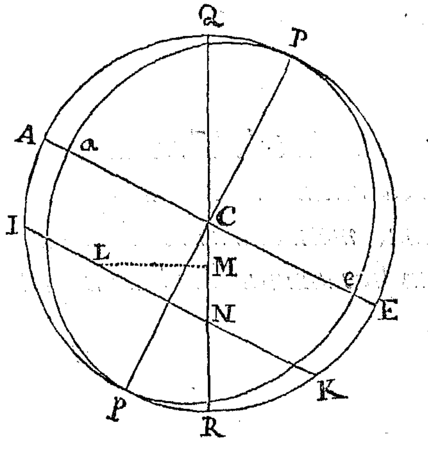
Si annulus, Terra omni reliqua sublatâ, solus in orbe Terræ motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.

Prop. XXXIX. Prob. XIX.

Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadraturis, erat 16″. 35‴. 16^iv. 36^v. & hujus dimidium 8″. 17‴. 38^iv. 18^v. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto sidereo 20 *gr.* 11′. 46″. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim 20 *gr.* 11′. 46″. in antecedentia; & si plures essent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent reciprocè ut tempora periodica; & propterea si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad 20 *gr.* 11′. 46″. ut dies sidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuò non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste quoad quantitatem materiæ æqualis sit Terræ omni *PapAPepE*, quæ globo *PapE* superior est; & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut *aC qu.* ad *AC qu.* — *aC qu.* id est (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* sit ad diametrum majorem *AC* ut 689 ad 692) ut 4143 ad 474721 seu 1000 ad 114584; si annulus iste Terram secundum æquatorem cingeret, & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per



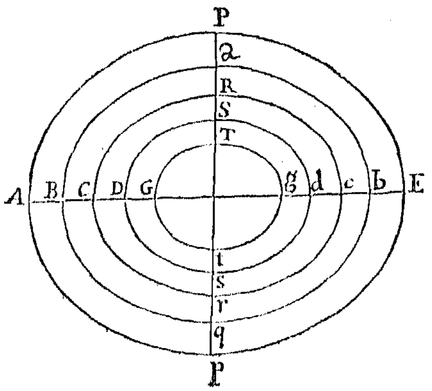
hu-

hujus Lem. II.) ut 4143 ad 474721 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est ut 4143 ad 439248: ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli & globi, ut 4143 ad 443391. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius Nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem ut 4143 ad 443391; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex globo & annulo compositi, ad motum 20 *gr.* 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4143 ad 443391 conjunctim, id est ut 1 ad 2932. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeò quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 *IT*, *in Fig. pag.* 444.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. I.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet quadruplo minor quàm prius. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad 20 *gr.* 11′. 46″, ut 1 ad 11728, ac proinde fieret 6″. 12‴. 2^{iv}. Hæc est præcessio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda. Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis ut $6\frac{1}{3}$ ad 1, & hæc vis pro quantitate sua augebit etiam præcessionem Æquinoctiorum. Ideoque præcessio illa ex utraque causa oriunda jam fiet major in ratione $7\frac{1}{3}$ ad 1, & sic erit 45″. 24‴. 15^{iv}. Hic est motus punctorum æquinoctialium ab actionibus Solis & Lunæ in partes Terræ, quæ globo *Pape* incumbunt, oriundus. Nam Terra ab actionibus illis in globum ipsum exercitis nullam in partem inclinari potest.

Designet jam *APEp* corpus Terræ figurâ Ellipticâ præditum, & ex uniformi materiâ constans. Et si distinguatur idem in figuras innumeras Ellipticas concentricas & consimiles, *APEp*, *BQbq*,

CRcr,

CRcr, *DSds*, *&c.* quarum diametri ſint in progreſſione Geometrica: quoniam figuræ conſimiles ſunt, vires Solis & Lunæ, quibus puncta æquinoctialia regrediuntur, efficerent ut figurarum reliquarum ſeorſim ſpectatarum puncta eadem æquinoctialia eadem cum velocitate regrederentur. Et par eſt ratio motus orbium ſingulorum *AQEq*, *BRbr*, *CScs*, *&c.* qui ſunt figurarum illarum differentiæ. Orbis uniuſcujuſque, ſi ſolus eſſet, puncta æquinoctialia eadem cum velocitate regredi deberent. Nec refert utrum orbis quilibet denſior ſit an rarior, ſi modò ex materia uniformiter denſa conſletur. Unde



etiam ſi orbes ad centrum denſiores ſint quàm ad circumferentiam, idem erit motus æquinoctiorum Terræ totius ac prius; ſi modo orbis unuſquiſque ſeorſim ſpectatus ex materia uniformiter denſa conſtet, & figura orbis non mutetur. Quod ſi figuræ orbium mutentur, Terraque ad æquatorem *AE*, ob denſitatem materiæ ad centrum, jam altius aſcendat quàm prius; regreſſus æquinoctiorum ex aucta altitudine augebitur, idque in orbibus ſingulis ſeorſim exiſtentibus, in ratione majoris altitudinis materiæ juxta orbis illius æquatorem; in Terra autem tota in ratione majoris altitudinis materiæ juxta æquatorem orbis non extimi *AQEq*, non intimi *Gg*, ſed mediocris alicujus *CScs*. Terram autem ad centrum denſiorem eſſe, & propterea ſub Æquatore altiorem eſſe quàm ad polos in majore ratione quàm 692 ad 689, in ſuperioribus inſinuavimus. Et ratio majoris altitudinis colligi ferè poteſt ex majore diminutione gravitatis ſub æquatore, quàm quæ ex ratione 692 ad 689 conſequi debeat. ~~Exceſſus~~ Defectus longitudinis penduli, quod in Inſula *Goree* & in illâ *Cayennæ* minutis ſingulis ſecundis oſcillatur, ~~ſu-~~ ~~pra~~ longitudine~~m~~ Penduli quod *Pariſiis* eodem tempore oſcillatur, à *Gallis*

Gallis inventi sunt pars decima & pars octava digiti, qui tamen ex proportione 692 ad 689 prodiere $\frac{81}{1000}$ & $\frac{89}{1000}$. Major est itaque longitudo Penduli *Cayennæ* quàm oportet, in ratione $\frac{1}{8}$ ad $\frac{89}{1000}$, seu 1000 ad 712; & in Insula *Goree* in ratione $\frac{1}{10}$ ad $\frac{81}{1000}$ seu 1000 ad 810. Si sumamus rationem mediocrem 1000 ad 760; minuenda erit gravitas Terræ ad æquatorem, & ibidem augenda ejus altitudo, in ratione 1000 ad 760 quam proximè. Unde motus æquinoctiorum (ut supra dictum est) auctus in ratione altitudinis Terræ, non ad orbem extimum, non ad intimum, sed ad intermedium aliquem, id est, non in ratione maxima 1000 ad 760, non in minima 1000 ad 1000, sed in mediocri aliqua, puta 10 ad $8\frac{1}{3}$ vel 6 ad 5, evadet annuatim $54''. 29'''. 6^{iv}$.

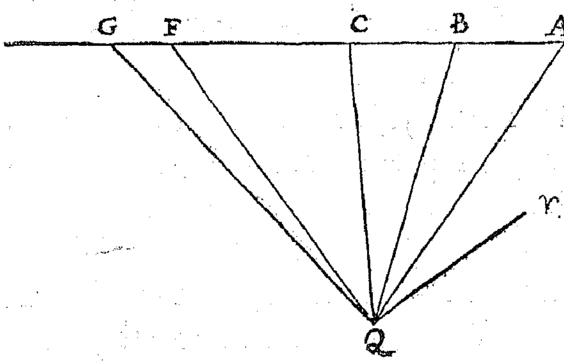
Rursus hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Nam distantia particulæ cujusque terrestris à plano *QR*, quo tempore particula illa à plano Eclipticæ longissimè distat, in Tropico suo (ut ita dicam) consistens, diminuitur, per inclinationem planorum Eclipticæ & Æquatoris ad invicem, in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Et in ratione distantiæ illius diminuitur etiam vis particulæ ad æquinoctia movenda. In eadem quoque ratione diminuitur summa virium particulæ ejusdem, in locis hinc inde à Tropico æqualiter distantibus: uti ex prædemonstratis facilè ostendi possit: & propterea vis tota particulæ illius, in revolutione integrâ, ad æquinoctia movenda, ut & vis tota particularum omnium, & motus æquinoctiorum à vi illa oriundus, diminuitur in eadem ratione. Igitur cum inclinatio illa sit $23\frac{1}{2}$ *gr.* diminuendus est motus $54''. 29'''$. in ratione Sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet $49''. 58'''$. Regrediuntur igitur puncta æquinoctiorum motu annuo (juxta computationem nostram) $49''. 58'''$, fere ut Phænomena cœlestia requirunt. Nam regressus ille annuus ex observationibus Astronomorum est $50''$.

Describsimus jam Systema Solis, Terræ & Planetarum; superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

Lemma IV.

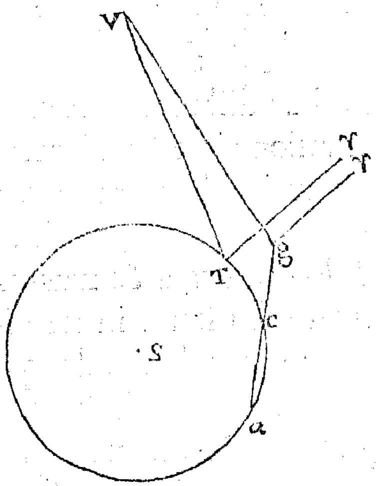
Cometas esse Lunâ superiores & in regione Planetarum versari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs moveri videntur, nunc verò celeriùs. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angula-
ut recta per Terram et Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam,
ri circa Solem tanto celerius fertur, Cometa è Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur.



Sunto ♈ QA, ♈ QB, ♈ QC observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque ♈ QF longitudo ultimò observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis QA & QB,

QB, QB & QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur AC ad G, ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur QG. Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus ♈QG longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈QG, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ meritò habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia verò Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet S Solem, acT orbem magnum, a locum Terræ in observatione prima, c locum Terræ in observatione secunda, T locum Terræ in observatione ultima, & T♈ lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈TV æqualis angulo ♈QF, hoc est æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in T. Jungatur ac, & producatur ea ad g, ut sit ag ad ac ut AG ad AC, & erit g locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur g♈ ipsi T♈ parallela, & capiatur angulus ♈gV angulo ♈QG æqualis, erit hic angulus ♈gV



 æqua-

æqualis longitudini Cometæ è loco g ſpectati; & angulus TVg parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione Terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus V orbe Jovis inferior eſſe ſolet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex Parallaxi, propterea quod reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas meo computo collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directè & ratione dimidiata lucis ad lucem inversè. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum ſexdecim pedum à *Cl. Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis ſuperabat caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, adeoque lux globi & annuli

con-

conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantiæ Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\surd 4$ inversè, & 12″ ad 30″ directè, id est ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprili*, ut Author est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter Capillitii Cometarum rarò superet 8′ vel 12′, diameter verò Nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel fortè decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certè ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quàm Planetæ, qui hic sunt, illustrantur à Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis à se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus à Capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad

Nu-

Nucleum capitis. Igitur si imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra discum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò proprior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum à Terra Solem versus, ac decrescente in eorum recessu à Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (observante *Hevelio*,) ex quo conspici cæpit, remittebat semper de motu suo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum Cometa radiis Solaribus obtectus desiit apparere. Cometa Anni 1683, observante eodem *Hevelio*, in fine Mensis *Julii* ubi primum conspectus est, tardissimè movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept*. 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug*. 6. esse tantum 6′. 5″ inclusâ comâ, at *Sept*. 2. esse 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis *Decembris*, & iste Anni 1680 circa finem ejusdem Mensis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere

sep-

ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decem.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decem.* 16. (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parùm, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantia novem graduum à Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decem.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decem.* 26. velociſſimè motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à ~~Terra diſtantias,~~ æqualiter lucere debuiſſent, in plaga Solis maximè ſplenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſimè moventur, atque adeo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à ſe reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum deberent ſæpius apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus verſarentur, & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in Hemiſphærio Solem verſus, quàm in Hemiſphærio oppoſito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum

mirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est à latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos etiam contra cursum Planetarum diutissimè conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

Prop. XL. Theor. XXI.

Cometas in Sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt, orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in ratione sesquialtera transversorum axium. Ideoque Cometæ maxima

xima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis Cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ absque erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis erit semper ad velocitatem Planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicatæ distantiæ ~~Cometæ~~ Planetæ à centro Solis ad distantiam ~~Planetæ~~ Cometæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum transversam, esse partium 100000000, & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, ~~& motu horario~~ partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione distantiarum ~~respectivè~~ reciprocè, ideoque datur.

Lemma V.

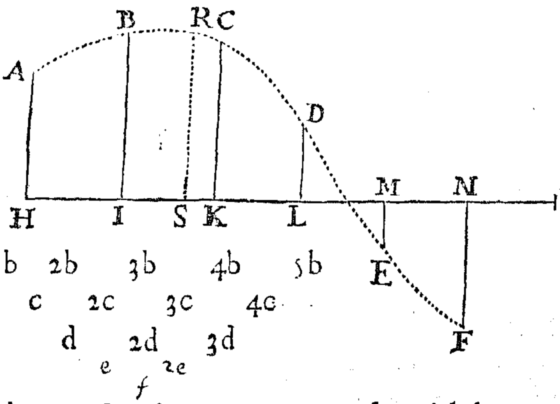
Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Cas. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia sunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK* &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, *&c.* secundas *c*,

 2c &c.

$2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias d, $2d$, $3d$, &c. id est, ita ut sit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$ &c. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates esse, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum ME, & præponendo signa negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, & signa affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et signis probe observatis erit $RS = a + bp, + cq + dr + es + ft$ &c.



Cas. 2. Quod si punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia sint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; secundas per intervalla bina divisas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna divisas e, $2e$, &c. & sic deinceps; id est ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$ &c. Postea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$ &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot,

quot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proximè cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per Methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

Lemma VI.

Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

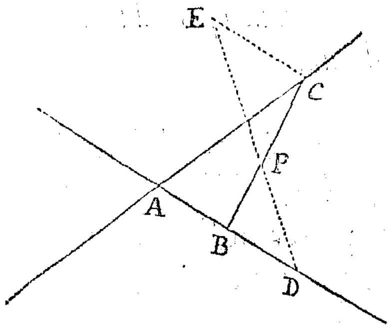
Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes, (*in Fig. præced.*) HA, IB, KC, LD, ME, observatas quinque longitudines Cometæ, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

Lemma VII.

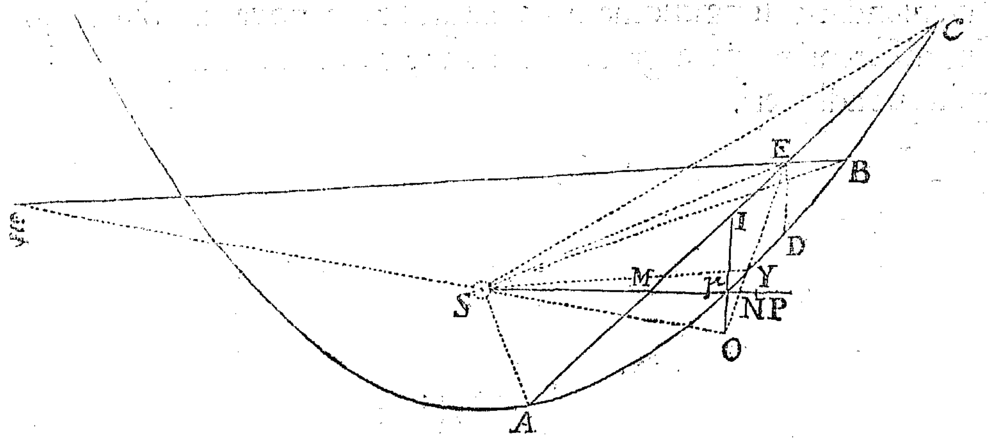
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* B C, *cujus partes* P B, P C, *rectis duabus positione datis* A B, A C *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*

Lemma VIII.

Sit A B C *Parabola umbilicum habens* S. *Chordâ* A C *bisectâ in* I *abscindatur segmentum* A B C I, *cujus diameter sit* I μ *&* *vertex* μ. *In* I μ *productâ capiatur* μ O *æqualis dimidio ipsius* I μ. *Jungatur* O S, *&*



producatur ea ad ξ, *ut sit* S ξ *æqualis* 2 S O. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* C B A, *&* *agatur* ξ B *secans* A C *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet*

scindet de chorda AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in Y, & erit area curvilinea AEY ad aream curvilineam ACY ut AE ad AC quamproximè. Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEY$ ad aream totam $ASCY$ ut AE ad AC quamproximè. Cum autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1 & EO ad YO prope in eadem ratione, erit SY ipsi EB parallela quamproximè, & propterea triangulum SEB, triangulo YEB quamproximè æquale. Unde si ad aream $ASEY$ addatur triangulum EYB, & de summa auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBY$ areæ $ASEY$ æqualis quamproximè, atque adeo ad aream $ASCY$ ut AE ad AC. Sed area $ASBY$ est ad aream $ASCY$ ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè. *Q. E. D.*

Lemma IX.

Rectæ Iμ *&* μM *&* *longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter se. Nam* 4Sμ *est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem* Bμ.

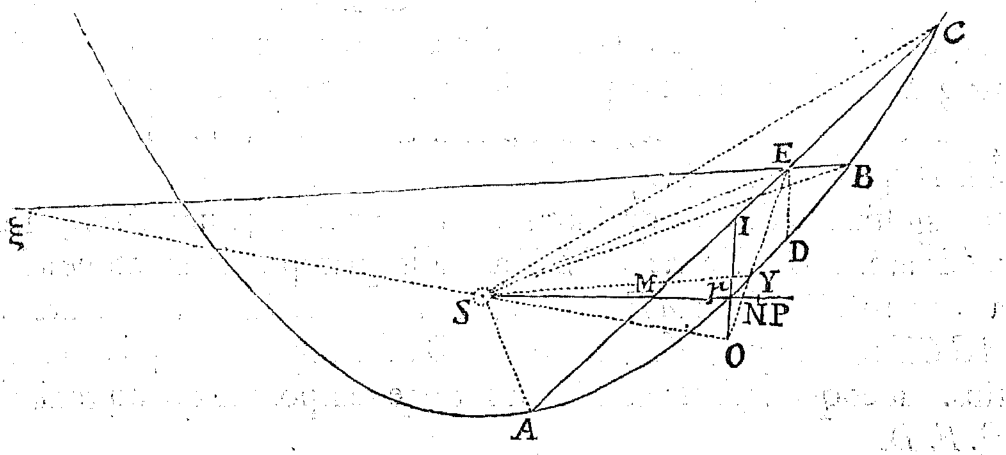
Lemma X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *sit pars tertia ipsius* μI, *&* SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa quo tempore describit arcum* AμC, *si progrederetur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrediatur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam Radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolicæ $ASC\mu$. Ideoque contentum sub longitudine in Tangente de-

scripta

ſcripta & longitudine $S\mu$, eſſet ad contentum ſub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum $ASCM$, id eſt ut SN ad SM. Quare AC eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas Cometæ in altitudine SP
(per Cor. 6 Prop. XVI Lib. I.
ſit ad velocitatem in altitudine $S\mu$ in dimidiata ratione SP ad $S\mu$



inverſè, id eſt in ratione $S\mu$ ad SN, longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in Tangente deſcriptam ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in Tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam AC quamproximè.

Lemma XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem qua urgetur ſub initio; idem quo tempore in orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore deſcribat arcum Parabolicum AC, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine SP (per

Lemma

Lemma novissimum) describet chordam AC, per Cor. 7 Prop. XVI Lib. I adeoque eodem tempore in circulo cujus semidiameter esset SP revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam AC in dimidiata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in Solem, describeret eodem tempore (per Scholium Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id est spatium $\frac{AIq.}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine SN sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium $\frac{AIq.}{4S\mu}$, id est spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

Prop. XLI. Prob. XX.

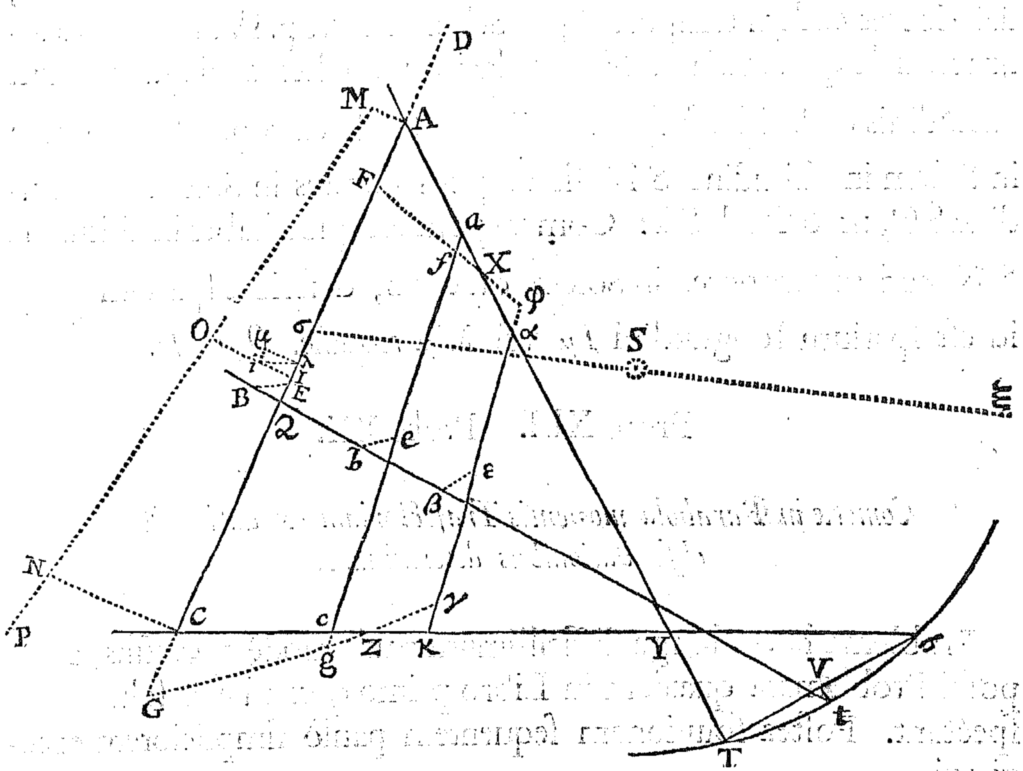
Cometæ in Parabola moventis Trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulò simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus Cometæ locus per Lemma sextum.

Designent S Solem, T, t, τ tria loca Terræ in orbe magno, TA, tB, τC observatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter observationem primam & secundam, W tempus inter secundam ac ter-

tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distantia, describere posset, & tV perpendiculum in chordam $T\tau$. In longitudine media $t\mathfrak{B}$ sumatur utcunque punctum $\mathfrak{B}$, & inde versus Solem S



ducatur linea $\mathfrak{B}E$, quæ sit ad Sagittam tV ut contentum sub $S\mathfrak{B}$ & St quadrato ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt $S\mathfrak{B}$ & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium $t\mathfrak{B}$. Et per punctum E agatur recta AEC, cujus partes AE, EC ad rectas TA & τC terminatæ, sint ad invicem ut tempora V & W: Tum per puncta A, $\mathfrak{B}$, C, duc circumferentiam circuli, eamque biseca in i, ut & chordam AC in I. Age occultam Si secantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto $\mathfrak{B}$ versus punctum ξ duc occultam

cultam novam BE, quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3} i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem ut tempora inter observationes, V & W.

Ad AC bisectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quorum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & τC. Jungatur MN secans IO in O. Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$, & agatur occulta OD. Deinde in MN versus N capiatur MP, quæ sit ad longitudinem supra inventam X in dimidiata ratione mediocris distantiæ Telluris à Sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam OD. Et in AC capiatur CG ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad easdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$ secans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et si in AC, ac, $\alpha\kappa$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipsis CG, cg, $\kappa\gamma$ respectivè æquales, & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$ secans rectam AT in X; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur: quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum, per Lemma VIII: & BE per Lem. XI. sit pars rectæ BS vel BE in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Lem. X ~~VIII~~.) longitudo sit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modò B sit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt in quo vestigium orbis in plano Eclipticæ descriptum secabit rectam tB præterpropter innotescat, in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ sit ad $\frac{4}{3}$ $T\tau$ in dimidiata ratione St ad SQ. Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabitur punctum B quod prima vice usurpare licet. Tum rectâ AC deletâ & secundum præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine MP; in tB capiatur punctum b, ea lege, ut si TA, τC se mutuò secuerint in Y, sit distantia Yb ad distantiam YB in ratione composita ex ratione MP ad MN & ratione dimidiata SB ad Sb. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β; si modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia Bb perexigua obvenerit, postquam inventa sunt puncta F, f & G, g, actæ rectæ Ff & Gg secabunt TA & τC in punctis quæsitis X & Z.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

		Tem. appar.	Temp. verū	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
1680 *December*	12	4.46	4.46.00	♑ 1.53. 2	♑ 6.33. 0	8.26. 0
	21	6.32½	6.36.59	11. 8.10	♒ 5. 7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14.10.49	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16.10.38	28.24. 6	27.00.57
	29	7.55	8.03. 2	19.20.56	♓ 13.11.45	28.10.05
	30	8. 2	8.10.26	20.22.20	17.37. 5	28.11.12
1681 *January*	5	5.51	6. 1.38	26.23.19	♈ 8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29.54	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6. 6.10	1.28.34	20.40.57	23.44.00
	13	6.56	7. 8.55	4.34. 6	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.58	♉ 9.55.48	17.56.54
	30	8.07	8.21.53	21.50. 9	♉ 13.19.36	16.40.57
February	2	6.20	6.34.51	24.47. 4	15.13.48	16.02.02
	5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

In

In his obſervationibus *Flamſtedius* eâ uſus eſt diligentiâ, ut poſtquam bis obſervaſſet diſtantiam Cometæ à Stella aliqua fixa, deinde etiam diſtantiam bis ab alia ſtella fixa, rediret ad ſtellam priorem & diſtantiam Cometæ ab eadem iterum obſervaret, idque bis, ac deinde ex diſtantiæ illius incremento vel decremento tempori proportionali colligeret diſtantiam tempore intermedio, quando diſtantia à ſtella altera obſervabatur. Ex hujuſmodi obſervationibus loca Cometæ feſtinanter computata *Flamſtedius* primò cum amicis communicavit, & poſtea eaſdem ad examen revocatas calculo diligentiore correxit. Nos loca correcta hic deſcripſimus.

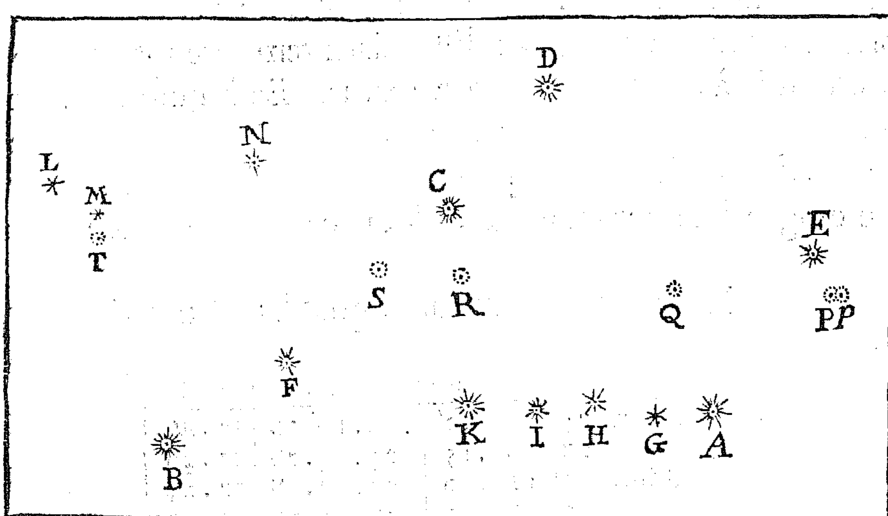
His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

		Temp.appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febru.	25	$8^h.30'$	♉ $26.19'.22''$	$12.46\frac{7}{8}$
	27	8 .15	27. 4.28	12.36
Mart.	1	11 . 0	27.53. 8	$12.24\frac{3}{7}$
	2	8 . 0	28.12.29	$12.19\frac{1}{2}$
	5	11 .30	29.20.51	$12.\ 2\frac{2}{3}$
	9	8 .30	♊ 0.43. 2	$11.44\frac{8}{5}$

Hæ obſervationes Teleſcopio ſeptupedali, & Micrometro filiſque in foco Teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis & poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones Cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero* o) *B* ſtellam ſequentem in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $53\frac{5}{11}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Die

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P.M. Cometæ in p existentis distantia à stella E erat major quàm $\frac{3}{13}$ AE, minor quàm $\frac{1}{5}$ AE, adeoque æqualis $\frac{3}{14}$ AE proximè; & angulus ApE nonnihil



obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad pE perpendiculum ab A, distantia Cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ pE.

Eadem nocte, horâ $9\frac{1}{2}$, Cometæ in P existentis distantia à stella E erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, minor quàm $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE, adeoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, seu $\frac{8}{39}$ AE quamproximè. A perpendiculo autem à Stella A ad rectam PE demisso distantia Cometæ erat $\frac{4}{5}$ PE.

Die ♂tis, *Mart.* 1, hor. 11. P.M. Cometa in R existens, stellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$ CK, & paulo minor quam $\frac{1}{3}$ CK + $\frac{1}{8}$ CR, adeoque æqualis $\frac{1}{3}$ CK + $\frac{1}{16}$ CR seu $\frac{16}{45}$ CK.

Die ☿ii, *Mart.* 2. hor. 8. P. M. Cometæ existentis in S, distantia à stella C erat $\frac{4}{9}$ FC quamproximè. Distantia stellæ F à recta CS producta erat $\frac{1}{24}$ FC; & distantia stellæ B ab eadem recta erat quintuplo major quàm distantia stellæ F. Item recta NS producta

tran-

transibat inter stellas *H* & *I*, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ *H* quàm stellæ *I*.

Die ♄ni, *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. P. M. Cometa existente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}$ *ML*, & recta *LT* producta transibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quàm *B*, auferens à *BF* quintam vel sextam ejus partem versus *F*. Et *MT* producta transibat extra spatium *BF* ad partes stellæ *B*, quadruplo propior existens stellæ *B* quam stellæ *F*. Erat *M* stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & *L* stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum *A* & *B* distantia esset 2 *gr*. $6\frac{4}{5}$, & stellæ *A* longitudo ♉ 26 *gr*. 41′. 48″ & latitudo borealis 12 *gr*. $8\frac{1}{2}$, stellæque *B* longitudo ♉ 28 *gr*. 40′. 16″. & latitudo borealis 11 *gr*. $17\frac{1}{5}$; quemadmodum à *Flamstedio* observatas accepi) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre constructâ usus sum, sed Longitudinum tamen & Latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultimâ *Mart.* 9. ubi positiones fixarum ad stellas *A* & *B* minus accuratè determinare potui. *Cassinus* qui Cometam eodem tempore observavit, se declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivisse fassus est. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter deflectere cæpit boream versus, à parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5. & *Jan.* 25. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda = 413$: *BE* secunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* — 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et

per

per hanc operationem inveni tandem diſtantias *TX* 4775 & *τZ* 11322. Ex quibus orbem definiendo inveni Nodos ejus in ♋ & ♑ 1 *gr.* 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 *gr.* 20$\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium Cometæ) in ♐ 27 *gr.* 43′ cum latitudine auſtrali 7 *gr.* 34′; & ejus latus rectum 236,8, areamq; radio ad Solem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585; Cometam verò *Decemb.* 8 *d.* 0 *h.* 4′. P. M. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula Sinuum naturalium collectas determinavi graphicè; conſtruendo Schema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16$\frac{1}{3}$ pedis Anglicani.

Tandem ut conſtaret an Cometa in Orbe ſic invento verè moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in Tabula ſequente videre licet.

COMETÆ

	Diſtant. Cometæ à Sole	Lon. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obſ.	Lat. Obſ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
Decemb. 12	2792	♑ 6.32	8.18$\frac{1}{2}$	♑ 6.33	8.26	− 2	− 7$\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13.13$_3$	28. 0	♓ 13.11$\frac{3}{4}$	28.10$\frac{1}{2}$	+ 2	− 10$\frac{1}{2}$
Febr. 5	16669	♉ 17. 0	15.29$\frac{2}{3}$	♉ 16.59$\frac{7}{8}$	15.27$\frac{2}{5}$	0	+ 2$\frac{1}{5}$
Mar. 5	21737	♉ 29.19$\frac{3}{4}$	12. 4	♉ 29.20$\frac{6}{7}$	12. 2$\frac{2}{3}$	− 1	+ 1$\frac{1}{3}$

Præterea cum *Cl. Flamſtedius* Cometam, qui Menſe *Novembri* apparuerat, eundem eſſe cum Cometa menſium ſubſequentium, literis ad me datis aliquando diſputaret, & Trajectoriam quandam ab orbe hocce Parabolico non longe aberrantem delinearet, viſum eſt loca Cometæ in hoc orbe Menſe *Novembri* computare, & cum Obſervationibus conferre. Obſervationes ita ſe habent.

Nov. 17. St. Vet. *Ponthæus* & alii hora ſexta matutina *Romæ*, (id eſt hora 5. 10′ *Londini*) Cometam obſervarunt in ≏ 8 *gr.* 30′ cum latitudine Auſtrali 0 *gr.* 40′. Extant autem eorum obſervationes in tractatu quem *Ponthæus* de hoc Cometa in lucem edidit. Eadem horâ *Galletius* etiam *Romæ*, Cometam vidit in ≏ 8 *gr.* ſine Latitudine.

Nov.

Nov. 18. *Pontheus* & Socii horâ matutinâ 6, 30′ *Romæ* (*i. e.* hor. 5. 40′ *Londini*) Cometam viderunt in ♎ 13½, cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 20′. Eodem die *R. P. Ango* in Academia *Flechenſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ, Cometam vidit in medio Stellarum duarum parvarum, quarum una media eſt trium in recta linea in Virginis Auſtrali manu, & altera eſt extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12 *gr.* 46′ cum Lat. Auſtr. 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Nova Anglia* in Lat. 42⅓, horâ quintâ matutinâ (id eſt *Londini* hora Mat. 9⅔) Cometa viſus eſt in ♎ 14 circiter, cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 30′; uti à *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora Mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à Spica ♍ quaſi 2 *gr.* Boreazephyrum verſus. Eodem die hor. 5. Mat. *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia* Cometa diſtabat à Spica ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum exiſtente 40′, atque adeo differentia Long. 44′ circiter. Unde Cometa erat in ♎ 18 *gr.* 40′. cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 19′. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent* prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in Confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ *gr.* horâ quintâ matutinâ (id eſt horâ 10ª *Londini*) Cometam vidit ſupra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, exiſtente diſtantia inter eoſdem quaſi ¾ *gr.* Obſervator idem, eadem horâ diei ſequentis, Cometam vidit quaſi 2 *gr.* inferiorem Spicâ. Congruent hæ obſervationes cum obſervationibus in *Nova Anglia* factis, ſi modò diſtantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore ſuperior eſſet Spica ♍ altitudine 52′ circiter, ac die poſteriore inferior eadem ſtellâ altitudine perpendiculari 2 *gr.* 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, hora ſexta Matutina, *Venetiis* (id eſt hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 *gr.* cum Lat. Auſtr. 1 *gr.* 30′. Eodem die *Boſtoniæ* diſtabat Cometa à Spica ♍, 4 *gr.* longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 *gr.* 24 circiter.

Nov. 21. *Pontheus* & Socii hor. mat. 7¼ Cometam obſervarunt in ♎ 27 *gr.* 50′ cum Latitudine Auſtrali 1 *gr.* 16′. *Ango* horâ

quintâ

quintâ mat. in ♎ 27 *gr*. 45′. *Montenarus* in ♎ 27 *gr*. 51′. Eodem die in Insulâ *Jamaicâ* visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id est 1 *gr*. 59′.

Novem. 22. Visus est à *Montenaro* in ♏ 2°. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in ♏ 3 *gr*. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde visus est à *Montenaro Novem*. 24. in ♏ 12 *gr*. 52′. & *Nov*. 25. in ♏ 17 *gr*. 45. Latitudinem *Galletius* jam ponit 2 *gr*. Eandem *Ponthæus* & *Galletius* decrevisse, *Montenarus* & *Ango* semper crevisse testantur. Crassæ sunt horum omnium observationes, sed eæ *Montenari*, *Angonis* & observatoris in *Nova-Anglia* præferendæ videntur. Ex omnibus autem inter se collatis, & ad meridianum *Londini*, hora mat. 5. 10′ reductis, colligo Cometam hujusmodi cursum quamproximè descripsisse.

	Long. Com	Latit. Com.
Nov. 17	♎ 8 . 0	0 . 45 Austr.
18	12 . 52	1 . 2
19	17 . 48	1 . 18
20	22 . 45	1 . 32
21	27 . 46	1 . 44
22	♏ 2 . 48	1 . 55
23	7 . 50	2 . 4
24	12 . 52	2 . 12
25	17 . 45	2 . 18

Loca autem Cometæ iisdem horis in orbe Parabolico inventa ita se habent.

	Comet. Lon.	Com. Lat.
Nov. 17	♎ 8 . 3	0 . 23 *A*
21	♎ 28 . 0	1 . 22 *A*
25	♏ 18 . 17	2 . 6 *A*

Congruunt igitur observationes tam mense *Novembri*, quam mensibus tribus subsequentibus cum motu Cometæ circa Solem in Trajectoriâ hacce Parabolicâ, atque adeo hanc esse veram hujus Cometæ Trajectoriam confirmant. Nam differentia inter loca observata

servata & loca computata tam ex erroribus observationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admissis, facilè oriri potuere.

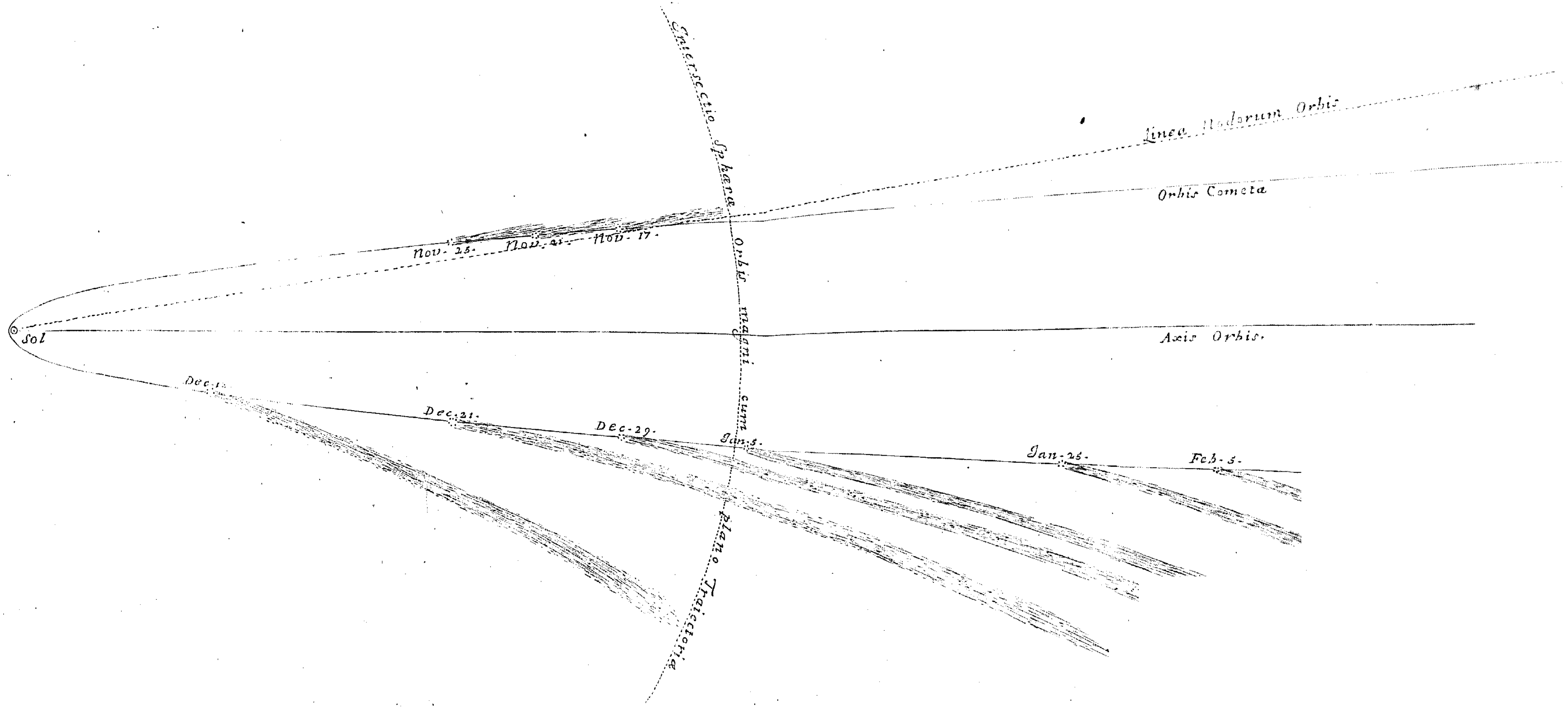
Cæterum Trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano Trajectoriæ opticè delineatas exhibere: observationibus sequentibus in cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Pontheo* apparuit. *Nov.* 18. cauda 30 *gr.* longa, Solique directe opposita in *Nova Anglia* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam δ, qui tunc erat in ♍ 9 *gr.* 54′. *Nov.* 19. in *Mary-Land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. cauda (observante *Flamstedio*) transibat per medium distantiæ inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in Aquilæ australi ala, & desinebat prope stellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}$ cum lat. bor. $34\frac{1}{4}$ *gr.* circiter. *Dec.* 11. surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero*, α. β,) desinens in ♑ 26 *gr.* 43′ cum lat. bor. 38 *gr.* 34′. *Dec.* 12. transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in ♒ 4°, cum lat. bor. $42\frac{1}{2}$ circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec.* 12. hora 5, 40′ *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra cygni Uropygium ad *gr.* 10. sese extulit; atque ab hac stella ejus latus ad occasum & boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus *gr.* 3. juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à Stella illa 2 *gr.* 15′ austrum versus, & terminus superior erat in ♓ 22 *gr.* cum lat. bor. 61 *gr.* *Dec.* 21. surgebat fere ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans à β & *Schedir*, & distantiam ab utraque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque desinens in ♓ 24 *gr.* cum lat. $47\frac{1}{2}$ *gr.* *Dec.* 29. tangebat *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54 *gr.* adeoque desinebat in ♉ 19 *gr.* cum lat. 35. *gr.* *Jan.* 5. tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum, & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat

40 *gr.*; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 grad. & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſima deſinebat è regione ſtellæ κ in latere *Perſei*. Diſtantia termini caudæ à circulo Solem & Cometam jungente erat 3 *gr.* 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$ *gr.* *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde ſerenum erat, luce tenuiſſimâ & ægerrimè ſenſibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, adeoque declinabat ab oppoſitione Solis Boream verſus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aſpexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. ſe caudam ad longitudinem *gr.* 12. vidiſſe ſcribit.

Orbem jam deſcriptum ſpectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi haud difficulter conſtabit quod corpora Cometarum ſunt ſolida, compacta, fixa ac durabilia ad inſtar corporum Planetarum. Nam ſi nihil aliud eſſent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in tranſitu ſuo per viciniam Solis ſtatim diſſipari debuiſſet. Eſt enim calor Solis ut radiorum denſitas, hoc eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à Sole. Ideoque cum diſtantia Cometæ à Sole *Dec.* 8. ubi in Perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æſtivi apud nos ut 1000000 ad 36, ſeu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quàm calor quem terra arida concipit ad æſtivum Solem; ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi rectè conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio verſantem ex radiis

So-


Intersectio Sphæræ Orbis magni cum plano Traiectoriæ
Linea Nodorum Orbis
Orbis Cometa
Axis Orbis.
Sol
Nov. 25.
Nov. 21.
Nov. 17.
Dec. 12.
Dec. 21.
Dec. 29.
Jan. 5.
Jan. 25.
Feb. 5.

Solaribus concipere poſſet; quaſi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad Solem concepit, & calorem illum diutiſſimè conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aere conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris ob cauſas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porrò notandum eſt quod Cometa Menſe *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quàm antea Menſe *Novembri*; ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è Cometis oriuntur, ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu Nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio, eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes à Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aere clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem absque materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissimè contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo Telescopiis evanescunt. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos absque omni refractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in Cometis cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa: sic enim Cometa Anni 1680, Mense *Decembri*, quo tempore caput luce sua vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: postea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissima,

quæ

quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9. & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28 hora $8\frac{1}{2}$ P. M. *Londini*, verſabatur in ♓ 8 *gr.* 41 cum latitudine boreali 28 *gr.* 6′, Sole exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′. Et Cometa Anni 1577 *Dec.* 29. verſabatur in ♓ 8 *gr.* 41′ cum latitudine boreali 28 *gr.* 40′. Sole etiam exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis Aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex Obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ

extre-

extremitatem alteram, atque adeò quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulò splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescit; vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aeris nostri. Nam aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 vicibus majus quam aqua ejusdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aeris ad summitatem Atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ

pedes

pg 503-504 are missing

alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ, impeditiſſimis in regionibus noſtris, à radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel planè quieſcit, vel motu ſolo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis aut aliis quibuſcunque facillimè accipiant & poſtea liberrime ſervent.

 Caudæ

Caudæ igitur quæ in Cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui adusq; Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegitabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem re-

spicit)

ſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modò Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & ingriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ diſtantiis, obſcurius apparuit poſt perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decem.* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at Menſe *Novem.* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumq; viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigienſi Novem.* 19. Cometa hicce luce ſua quamtumvis plumbea & obtuſa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quàm poſtea. Et *D. Storer* literis quæ in manus noſtras incidêre, ſcripſit caput ejus Menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ qui Menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, deſcribantur ſubobſcura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora ſeptima Veſp. *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id eſt gradus 45) occupaſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa;

tenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem delitеſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio Menſis *Feb.* circa veſperam ad occaſum Solis brumalem. Inde verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Pariſienſis, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente verò die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minimâ fieri poteſt diſtantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur.

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe & in orbibus minoribus revolvi rationi conſentaneum videtur. Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometametarum in iiſdem orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquo. Interea huic negotio Propoſitio ſequens Lumen accendere poteſt.

Prop. XLII. Prob. XXI.

Trajectoriam Cometæ graphicè inventam corrigere.

Oper. 1. Aſſumatur poſitio plani Trajectoriæ, per Propoſitionem ſuperiorem graphicè inventa; & ſeligantur tria loca Cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quam maximè diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longe à Perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur per operationes Trigonometricas loca tria vera Cometæ in aſſumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes ~~Arithmeticas,~~ ope Prop. XXI. Lib. I. inſtitutas, deſcribatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota $D + E$, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, deſcribi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis obſervatis inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut ſupra): deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d + e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis

ſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ quo area tota $\delta + \varepsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis $+$ & $-$ probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege ut ſit $G - C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $T - S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et ſi, in operatione prima, I deſignet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius: erit $I + nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, r & ρ deſignent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem Latera tranſverſa reſpectivè: erit $R + mr - mR + n\rho - nR$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ verum Latus tranſverſum Trajectoriæ quam Cometa deſcribit. Dato autem Latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

FINIS.