

AN. MANL. SEV. BOETHII DE ARITHMETICA

LIBRI DUO,

PRÆFATIO.

In dandis accipiendisque muneribus, ita recte officia, vœcipue inter eos qui sese magnificiunt, æstimantur, si liquido constabit, nec ab hoc aliud quod liberalius afferret ingentum, nec ab illo unquam, quod jucundius benevolentia complecteretur acceptum. Hæc ipse considerans, attuli non ignava opum pondera, quibus ad facinus nihil instructius est, cum habendi sitis incanduit. Ad meritum nihil vilius, cum ea sibi victor animus calcata subiecit, sed ea quæ ex Græcarum opulentia litterarum, in Romanæ orationis thesaurum sumpta conveximus. Ita enim mei quoque operis mihi ratio constabit, si quæ ex sapientiæ doctrinis elicui, sapientissimi iudicio comprobentur. Vides igitur ut tam magni laboris effectus, tuum tantum expectet examen, nec in aures prodire publicas, nisi doctæ sententiæ astipulatione nitatur. In quo nihil mirum videri debet, cum id opus quod sapientiæ inventa persequitur, non auctoris sed alieno incumbit arbitrio. Suis quippe instrumentis res rationis expenditur, cum iudicium cogitur subire prudentis. Sed huic munusculo, non eadem quæ cæteris imminet artibus munimenta constituo. Neque enim fere ulla, sic cunctis absoluta partibus, nullius indiga, suis tantum est scientia nixa præsidii, ut non cæterarum quoque artium adjumenta desideret. Nam in effigiandis marmore statuis, alius excidendæ molis labor est, alia formandæ imaginis ratio. Nec ejusdem artificis manus, politici operis nitore expectat. Ac depingendæ manibus tabulæ commissæ fabrorum, cæræ rustica observatione decerptæ, colorum fuci mercatorum solertia perquisiti, lintea operosis elaborata textrinis, multiplicem materiam præstant. Nonne idem quoque in bellorum visitur instrumentis? Hic spicula sagittis exacuit, illi validus thorax nigra gemit incude. Ast alius crudi umbonis tegmina, proprii laboris orbi infigenda mercatur, tam multis artibus ars una perficitur. Ast nostri laboris absolutio longe ad faciliorem currit eventum. Tu enim solus manum supremo operi impones, in quo nihil de decernentium necesse est laborare consensu. Quamlibet

A enim hoc iudicium multis artibus probetur excultum, uno tamen cumulatur examine. Experiare igitur licet quantum nobis in hoc studio longis tractus otis labor adjecerit. An rerum subtilium fugas exercitæ mentis velocitas comprehendat? Utrum jejunæ macies orationis, ad ea quæ sunt caligantibus impedita sententiis, expedienda sufficiat? Qua in re mihi alieni quoque iudicii lucra quæruntur, cum tu, utrarumque peritissimus litterarum, possis Græcæ orationis expertibus, quantum de nobis iudicare audeant, sola tantum pronuntiatione præscribere. At non alterius obnoxius institutis, arctissima memetipse translationis legé constringo, sed paululum liberius evagatus, alieno itineri, non vestigiis insisto. Nam et ea quæ de numeris a Nicomacho diffusius disputata sunt, moderata brevitate collegi. Et quæ transcursa velocius angustiore intelligentiæ præstabant aditum, mediocri adiectione reseravi, ut aliquando ad evidentiam rerum, nostris etiam formulis ac descriptionibus uteremur. Quod nobis quantis vigiliis ac sudore constitierit, facile sobrius lector agnoscat. Cum igitur quatuor matheseos disciplinarum, de arithmetica, quæ est prima, præscriberem, tu tantum dignus eo munere videbare, eoque magis in errato opus esse intelligebam. Nam etsi apud te facilis venire locus esset, aliquando tamen ipsam formidabat facilitatem suspecta securitas. Arbitrabar enim nihil tantæ reverentiæ oblatum iri oportere, quod non elaboratum ingenio, perfectum studio, dignum postremo tanto otio videretur. Non igitur ambigo quin pro tua in me benevolentia supervacua recesses, hiantia suppleas, errata reprehendas, commode dicta, mira animi alacritate suscipias. Quæ res impulit pigram consilii moram. Nimios enim mihi fructus placitura restituent. Novi quippe quanto studiosius nostra quam cæterorum bona diligamus. Recte ergo quasi æreos Cereri culmos, et maturos Baccho palmites, sic ad te rudimenta novi operis transmisi. Tu tantum paterna gratia nostrum provehas munus, ita et laboris mei primitias doctissimo iudicio consecrabis, et non majore censebitur auctor merito quam probator.

LIBER PRIMUS.

CAPUT PRIMUM.

Divisio mathematicæ.

Inter omnes priscae auctoritatis viros qui, Pythagora duce, puriore mentis ratione vigerunt, constare manifestum est haud quemquam in philosophiæ disciplinis ad cumulatum perfectionis evadere, nisi cui talis prudentiæ nobilitas quodam quasi quadrivio vestigatur, quod recte solertiæ intuentis non latebit. Est enim sapientiæ rerum quæ sunt suique immuta-

bilem substantiam sortiuntur comprehensio veritatis. Esse autem illa dicimus, quæ nec intentione crescent, nec retractione minuuntur, nec variationibus permittuntur, sed in propria semper vi, suæ se naturæ subsidiis nixa custodiunt. Hæc autem sunt qualitates, quantitates, formæ, magnitudines, parvitates, æqualitates, habitudines, actus, dispositiones, loca, tempora, et quidquid adunatum quodammodo corporibus invenitur. Quæ ipsa quidem natura incorporea sunt,

et immutabilis substantiæ ratione vigentia, participatione vero corporis permutantur, et tactu variabilis rei, in vertibilem inconstantiam transeunt. Hæc igitur (quoniam ut dictum est, natura immutabilem substantiam vimque sortita sunt) vere proprieque esse dicuntur. Horum igitur, id est, quæ sunt proprie, quæque suo nomine essentiæ nominantur, scientiam, sapientiam profitetur. Essentiæ autem geminæ partes sunt, una continua, et suis partibus junctæ, nec ullis finibus distributa, ut est arbor, lapis, et omnia mundi hujus corpora, quæ proprie magnitudines appellantur. Alia vero disjuncta a se, et determinata partibus, et quasi acervatim in unum redacta concilium, ut grex, populus, chorus, acervus, et quidquid eorum quorum partes propriis extremitatibus terminantur, et ab alterius sine discretæ sunt. His, proprium nomen est multitudo. Rursus multitudinis alia sunt per se, ut tres vel quatuor, vel tetragonus, vel quilibet numerus, qui, ut ait, nullo indiget. Alia vero per seipsa non constant, sed ad quiddam aliud referuntur, ut duplum, ut dimidium, ut sesquialterum, vel sesquitergium, et quidquid tale est, quod nisi relatum sit ad aliud, ipsum esse non possit. Magnitudinis vero, alia sunt manentia, motuque carentia, alia vero, quæ mobili semper rotatione vertuntur, nec ullis temporibus acquiescunt. Horum ergo, illam multitudinem quæ per se est, arithmetica speculatur integritas. Illam vero, quæ ad aliquid, musici modulaminis temperamenta pernolescunt. Immobilis vero magnitudinis, geometrica notitiam pollicetur. Mobilis scientiam, astronomicam disciplinæ peritiam vindicavit. Quibus quatuor partibus si careat inquisitor, verum invenire non possit, ac sine hac quidem speculatione veritatis nulli recte sapiendum est. Est enim sapientia earum rerum quæ vere sunt, cognitio et integra comprehensio. Quod hæc qui spernit, id est, has semitas sapientiæ, ei denuntio non recte philosophandum. Siquidem philosophia est amor sapientiæ, quam in his spernendis ante contempserit. Illud quoque addendum arbitror quod cuncta vis multitudinis ab uno progressa termino, ad infinita progressionis augmenta concrevit. Magnitudo vero, a finita inchoans quantitate, modum in divisione non recipit. Infinitissimas enim sui corporis suscipit sectiones. Hanc igitur naturæ infinitatem, indeterminatamque potentiam philosophia sponte repudiat. Nihil enim quod infinitum est vel scientia potest colligi, vel mente comprehendi. Sed hinc sumpsit sibi ipsa ratio, in quibus possit indagatricem veritatis exercere solentiam. Delegit enim de infinitæ multitudinis pluralitate, finitæ terminum quantitatis, et interminabilis magnitudinis sectione rejecta, definita sibi ad cognitionem spatia depoposcit. Constat igitur quisquis hæc prætermiserit, omnem philosophiæ perdidisse doctrinam. Hoc igitur illud quadri- vium est, quo iis viandum sit, quibus excellentior animus a nobiscum procreatis sensibus, ad intelligentiæ certiora perducitur. Sunt enim quidam gradus certæque progressionum dimensiones, quibus ascendi progredi- que possit, ut animi illum oculum, qui (ut

ait Plato) multis oculis corporalibus salvam constitui- que sit dignior, quod eo solo lumine vestigari vel inspicere veritas queat. Hunc, inquam, oculum de- nersum, orbatumque corporeis sensibus, hæc disciplina rursus illuminent. Quæ igitur ex his prima discenda est, nisi ea quæ principium matrisque quodammodo ad cæteras obtinet portionem? Hæc autem est arithmetica. Hæc enim cunctis prior est, non modo quod hanc ille hujus mundanæ molis conditor Deus, primam suæ habuit ratiocinationis exemplar, et ad hanc cuncta constituit, quæcunque fabricante ratione, per numeros assignati ordinis invenere concordiam; sed hoc quoque prior arithmetica declaratur, quod quæcunque natura priora sunt, his sublatis simul posteriora tolluntur. Quod si posteriora pereant, nihil de statu prioris substantiæ permutatatur, ut animal prius est homine. Nam si tollas animal, statim quoque hominis natura deleta sit. Si hominem sustuleris, animal non peribit. Et econtrario ea semper posteriora sunt quæ secum aliud quodlibet inferunt, ea priora quæ, cum dicta sunt, nihil secum de posterioribus trahunt, ut in eodem quoque homine. Nam si hominem dixeris, simul quoque animal nominabis. Idem est enim homo quod animal. Si animal dixeris, non speciem simul hominis intulisti. Non est enim idem animal quod homo. Hoc idem in geometrica vel in arithmetica videtur incurrere. Si enim numeros tollas, unde triangulum vel quadratum, vel quidquid in geometria versatur? quæ omnia numerorum denominativa sunt. At vero, si quadratum triangulumque sustuleris, omnisque geometrica consumpta sit, tres et quatuor, aliorumque numerorum non peribunt vocabula. Rursus cum aliquam geometricam formam dixeris, est illi simul numerorum nomen implicitum. Cum numeros dixeris, nondum ullam formam geometricam nominavi. Musica vero quam prior sit numerorum vis, hinc maxime probari potest, quod non modo illa natura priora sunt, quæ per se constant, quam illa quæ ad aliquid referuntur, sed etiam ea ipsa musica modulatio numerorum nominibus adnotatur. Et idem in hac evenire potest quod in geometrica prædictum est. Diatessaron enim et diapente et diapason ab antecedentis numeri nominibus nuncupantur. Ipsorum quoque sonorum adversus se proportio, solis neque aliis numeris invenitur. Qui enim sonus in diapason symphonia est, idem duplicis numeri proportionem colligitur. Quæ diatessaron est modulatio, epitrita collatione componitur. Quam diapente symphoniam vocant, hemiolia medietate jungitur. Qui in numeris epogdous est, idem tonus in musica. Et ne singula persequi laborem, hujus operis sequentia, quanto prior sit arithmetica, sine ulla dubitatione monstrabunt. Sphæricam vero atque astronomicam tanto præcedit, quanto duæ reliquæ disciplinæ hanc tertiam natura præcedunt. In astronomica enim, circuli, sphæra, centrum, parallelique circuli, mediusque axis est, quæ omnia geometricæ disciplinæ curæ sunt. Quare est etiam ex hoc ostendere seniores geometricæ vim, quod omnis motus est post quietem,

et natura semper statio prior est. Mobilium vero astronomica, immobilium geometrica doctrina est, vel quod harmonicis modulationibus motus ipse celebratur astrorum. Quare constat quoque musicæ vim, astrorum cursus antiquitate præcedere, quam superare natura arithmetica dubium non est, cum prioribus, quam illa est, antiquior videatur. Proprie tamen ipsa numerorum natura, omnis astrorum cursus, omnisque astronomica ratio constituta est. Sic enim ortus occasusque colligimus, sic tarditates velocitatesque errantium siderum custodimus, sic defectus et multiplices lunæ variationes agnoscimus. Quare quoniam prior, ut claruit, arithmetica vis est, hinc disputationis sumamus exordium.

CAPUT II.

De substantia numeri.

Omnia quæcunque a primæva rerum natura constructa sunt, numerorum videntur ratione formata. Hoc enim fuit principale in animo conditoris exemplar. Hinc enim quatuor elementorum multitudo mutata est, hinc temporum vices, hinc motus astrorum, cœlique conversio. Quæ cum ita sint, cumque omnium status numerorum colligatione fungatur, eum quoque numerum necesse est, in propria semper sese habentem æqualiter substantia, permanere, eoque compositum non ex diversis. Quid enim numeri substantiam conjungeret, cum ipsius exemplum cuncta junxisset? sed ex seipso videtur esse compositus. Porro autem nihil ex similibus componi videtur, nec ex his quæ nulla rationis proportionem junguntur, et a se omni substantia naturaque discreta sunt. Constat ergo quoniam conjunctus est numerus, neque ex similibus esse conjunctum, neque ex his quæ ad se invicem nulla ratione proportionis hærent. Erunt ergo, numeros, prima quæ conjungant, ad substantiam quidem quæ constant, semperque permanent. Neque enim ex non existentibus effici quidquam potest, et sunt ipsa dissimilia et potentia componendi. Hæc autem sunt quibus numerus constat, par atque impar. Quæ divina quadam potentia cum disparia sint contrariaque, tamen ex una genitura proflount, et in unam compositionem modulationemque junguntur.

CAPUT III.

De definitione et divisione numeri, et definitione paritatis et imparitatis.

Et primum quid sit numerus definiendum est. Numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus. Hujus igitur prima divisio est in imparem atque parem. Et par quidem est, qui potest in æqualia duo dividi, uno medio non intercedente. Impar vero quem nullus in æqualia dividit, quin in medio prædictus unus intercedat. Et hæc quidem hujusmodi definitio vulgaris est et nota.

CAPUT IV.

Definitio numeri paritatis et imparitatis secundum Pythagoram.

Illia autem secundum Pythagoricam disciplinam alia est. Par numerus est, qui sub eadem divisione

potest in maxima parvissimaque dividi. Maxima spatia, parvissima quantitate, secundum duorum istorum generum contrarias passionem. Impar vero numerus est, cui hoc quidem accidere non potest, sed cujus in duas inæquales summas naturalis est sectio. Hoc est autem exemplar. Ut si quilibet status par numerus dividatur, major quidem (quantum ad divisionis spatia pertinet) non inveniatur quam discreta medietas; quantitate vero nulla minor sit, quam in gemina facta partitio, ut si par numerus qui est 8, dividatur in 4 atque alios 4, nulla erit alia divisio, quæ majores partes efficiat. Porro autem nulla erit alia divisio quæ totum numerum minore dividat quantitate. In duas enim partes divisione, nihil minus est. Cum enim totum quis fuerit trina divisione partitus, spatium quidem summa minuitur, sed numerus divisionis augetur. Quod autem dictum est, secundum duorum generum contrarias passionem, hujusmodi est. Prædicimus enim quantitatem in infinitas pluralitates accrescere, spatia vero, id est magnitudines, in infinitissimas minui parvitates, atque ideo hic contra evenit; hæc namque paritatis divisio, spatium est maxima, parvissima quantitate.

CAPUT V.

Alia secundum antiquiorem modum definitio paritatis et imparitatis.

Secundum antiquiorem vero modum, alia est paritatis numeri definitio. Par numerus est qui in duas æqualia, et in duo inæqualia partitionem recipit, sed ut in neutra divisione, vel imparitati paritatis, vel paritati imparitas miscetur, præter solum paritatis principem binarium numerum, qui inæqualem non recipit sectionem, propterea quod ex duabus unitatibus constat, et ex prima duorum quodammodo paritate. Quod autem dico, tale est: si enim ponatur par numerus, potest in duo æqualia dividi, ut denarius dividitur in quinos. Porro autem et per inæqualia, et idem denarius in 3 et in 7. Sed hoc modo, ut cum una pars fuerit divisionis par, alia quoque par invenitur, et si una impar, reliqua ab ejus imparitate non discrepet, ut in eodem numero qui est denarius. Cum enim divisus est in quinos, vel cum in 3 et in 7 utraque in utraque portione partes, impares exstiterunt. Si autem ipse vel alius numerus par dividatur in æquales, ut octonarius in 4 et in 4, et item per inæquales, ut idem octonarius in 5 et in 3, in illa quidem divisione utraque partes pares factæ sunt, et in hac utraque impares exstiterunt. Neque unquam fieri potest, ut cum una pars divisionis par fuerit, alia impar inveniri queat, aut cum una impar sit, alia par possit intelligi. Impar vero numerus est qui ad quamlibet illam divisionem, per inæqualia semper dividitur, ut utrasque species numeri semper ostendat, nec unquam altera sine altera sit, sed una pars paritati, imparitati alia deputatur, ut 7 si dividatur in 3 et in 4, altera portio par, altera impar est. Et hoc idem in cunctis imparibus numeris invenitur. Neque unquam in imparis divisione, præter se esse possunt

hæ geminæ species, quæ naturaliter vim numeri **A** cum nomine ipso vocabuloque pariter par invenitur, tum etiam quantitate. Sed ideo mihi videtur hic numerus pariter par vocatus, quod ejus omnes partes et nomine et quantitate pares pariter inveniantur.

CAPUT VI.

Diffinitio paris et imparis per alterutrum.

Quod si hæc etiam per alterutras species diffinienda sunt, dicetur imparem numerum esse, qui unitate differt a pari, vel incremento, vel diminutione. Item par numerus est, qui unitate differt ab impari, vel incremento, vel diminutione. Si enim pari unum dempseris vel unum adjeceris, et impar efficitur, vel si impari idem feceris, par continuo procreatur.

CAPUT VII.

De principalitate unitatis.

Omnis quoque numerus circum se positum et naturali sibi met dispositione junctorum medietas est. Et qui super duos illos sunt, qui medio junguntur, si componantur, etiam ipsorum supradictus numerus media portio est, et rursus illorum qui sunt super secundo loco junctos, cum ipsi quoque sint compositi, prior his numerus medietatis loco est, et hoc erit usque dum occurrens unitas terminum fecerit. Ut si ponat quis quinarium numerum, altrinsecus circa ipsum sunt, supra 4, inferius 6. Hi ergo si juncti sunt, faciunt 10, quorum 5 numerus medietas est. Qui autem circa ipsos, id est circa 6 et 4 sunt, 5 scilicet et 7; idem si juncti sunt, eorum quinarium numerus medietas est. Rursus istorum, qui altrinsecus positi sunt, si jungantur, etiam hi quinarium numeri dupli sunt. Nam super 3 sunt 2, super 7 sunt 8. Hi ergo si juncti sunt faciunt 10, quorum quinarium rursus medietas est. Hoc idem in omnibus numeris evenit, usque dum ad unitatis terminum perveniri queat. Sola enim unitas circum se duos terminos non habet, atque ideo ejus, qui est prope se, solius est medietas. Nam juxta unum solus est binarius naturaliter constitutus, cujus unitas media pars est. Quare constat primam esse unitatem, cunctorum qui sunt in naturali dispositione numerorum, et etiam rite totius quamvis prolixæ, genitricem pluralitatis agnoscere.

CAPUT VIII.

Divisio paris numeri

Paris autem numeri species sunt 3. Est enim una quæ dicitur pariter par, alia vero pariter impar, tertia impariter par. Et contraria quidem, locaque obtinentia summitatum, videntur esse pariter par, et pariter impar. Medietas autem quædam quæ utrorumque participat, est numerus qui vocatur impariter par.

CAPUT IX.

De numero pariter pari ejusque proprietatibus.

Pariter par numerus est qui potest in duo paria dividi, ejusque pars in alia duo paria, partisque pars in alia duo paria, ut hoc totiens fiat, usque dum divisio partium ad indivisibilem naturaliter perveniat unitatem. Ut 64 numerus habet medietatem 32, hic autem medietatem 16, hic vero 8, hunc quoque quaternarius in æqua partitur, qui binarii duplus est, sed binarius unitatis medietate dividitur, quæ unitas naturaliter singularis, non recipit sectionem. Huic numero videtur accidere, ut quæcumque ejus fuerit pars,

cum nomine ipso vocabuloque pariter par invenitur, tum etiam quantitate. Sed ideo mihi videtur hic numerus pariter par vocatus, quod ejus omnes partes et nomine et quantitate pares pariter inveniantur. Quomodo autem et nomine et quantitate pares habeat partes hic numerus, post dicemus. Horum autem generatio talis est. Ab uno enim quoscunque in duplici proportione notaveris, semper pares pariter procreantur. Præter hanc autem generationem ut nascentur aliter, impossibile est. Hujus autem rei tale videtur per ordinem descriptionis exemplum. Sint itaque cuncti duplices ab uno 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, atque hinc si fiat infinita progressio, tales cunctos invenies. Factique sunt ab uno in duplici proportione, et omnes sunt pariter pares. Illud autem non minima consideratione dignum est, quod ejus omnis pars, ab una parte quacunque quæ intra ipsum numerum est denominatur, tantamque summam quantitatis includit, quota pars est alter numerus pariter paris, illius qui eum continet quantitatis. Itaque fit ut sibi partes ipsæ respondeant, ut quota pars una est, tantam habeat altera quantitatem, et quota pars ista est, tantam in priore summam necesse sit multitudinis inveniri. Et primum fit, si pares fuerint dispositiones, ut duæ mediæ partes sibi respondeant, post vero quæ super ipsas sunt sibi invicem convertantur, atque hoc idem fiat donec uterque terminus extremitates incurrat. Ponatur enim pariter paris ordo, ab uno usque 128, hoc modo 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, et ea sit summa maxima. In hoc igitur quoniam pares dispositiones sunt, una medietas non potest inveniri. Sunt igitur duæ, id est 8 et 16, quæ considerandæ sunt, quemadmodum ipsæ sibi respondeant. Totius enim summæ, id est 128, octava pars est 16, sexta decima 8. Rursus super has partes quæ sunt, ipsæ sibi invicem respondebunt, id est 32 et 4. Nam 32 quarta pars est totius summæ, 4 vero trigesima secunda. Rursus super has partes 64, secunda pars est, 2 vero sexagesima quarta. Donec extremitates limitem faciant, quas dubium non est eadem responsione gaudere. Est enim omnis summa, semel 128, unus vero, centesimus vigesimus octavus. Si autem impares terminos ponamus, id est summas (idem enim terminos, quod summas, nomino), secundum imparis naturam, potest una medietas inveniri, atque una sibi ipsa est responsura. Si enim ponatur hic ordo 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, una erit sola medietas, id est 8. Qui 8 summæ totius pars est octava, et sibi ipsi ad denominationem quantitatemque convertitur. Eodemque modo, sicut superius, circa ipsum qui sunt termini, donant sibi mutua nomina, secundum proprias quantitates, vocabulumque permutant. Nam 4 sexta decima pars est totius summæ, 16 vero quarta. Et rursus super hos terminos, 32 secunda pars est totius summæ, 2 vero trigesima secunda, et semel tota summa 64 sunt, sexagesima quarta vero unitas invenitur. Hoc igitur est quod dictum est, omnes ejus partes et nomine et quantitate pariter pares inveniri. Hoc quoque multa consideratione,

multaque constantia divinitatis perfectum est, ut ordinatim dispositæ minores summæ in hoc numero et super seipsas coacervatæ sequenti minus uno semper æquantur. Si enim unum jungas his qui sequuntur duobus, sunt 3, id est, qui uno minus quaternario cadunt. Et si superioribus addas 4, sunt 7, qui ab octonario sequente sola unitate vincuntur. Sed si eosdem 8 supradictis adjunxeris, 15 fient, qui par 16 numeri existeret quantitati, nisi minor unitas impediret. Hoc autem prima etiam numeri progenies servat atque custodit. Namque unitas quæ prima est, duobus subsequentiibus sola est unitate contractior. Unde nihil mirum est, totum summæ clementum proprio consentire principio. Hæc autem nobis considerandi maxime proderit, in his numeris cognoscendis quos superfluos vel imminutos imperfectosque monstrabimus. Illic enim coacervata quantitas partium numeri totius termino comparatur. Illud quoque nulla possumus oblivione transmittere, quod in hoc numero respondentibus sibi invicem partibus multiplicatis, major extremitas ejusdem numeri summaque conficitur. Et primum si pares fuerint dispositiones, medii multiplicantur, atque inde qui super ipsos sunt, usque ad supradictos extremitates. Si enim fuerint pares dispositiones, secundum naturam paris duos in medio terminos continebunt, ut in ea dispositione numerorum in qua extremus terminus 128 finitur. In hoc enim numero medietates sunt 8, scilicet, et 16 quæ in se multiplicatæ majoris summam crescente pluralitate efficiunt. Octies enim 16, vel sedecies 8 si multiplices, 128 summa concrevit. Atque hi numeri qui super eosdem sunt, si multiplicentur idem faciunt. Nam 4 et 32 in se si multiplices, supradictam faciunt extremitatem, 4 enim trigies et bis, vel quater 32 ducti, 128 immutabili necessitate complebunt. Atque hoc usque ad extremos terminos cadit, id est 1 et 128. Semel enim extremus terminus 128 est. Centies vigies atque octies unitate multiplicata, nihil de priore quantitate mutabitur. Si autem impares fuerint dispositiones, unus medius terminus invenitur, atque ipse sibi propria multiplicatione respondet. In eo namque ordine numerorum, ubi extremus terminus 64 pluralitate concluditur, sola invenitur una medietas, id est 8. Quam si octies, id est in semetipsam multiplices 64 explicabit. Atque idem reddunt illi qui super hanc medietatem sunt, ut dudum hi qui super duas positi faciebant. Nam quater 16, 64 sunt, et selecies 4 idem complent. Rursus bis 32, facti a 64 non discedunt, et trigies bis duo, eosdem cumulant, et semel 64, vel unitas sexagies quater multiplicata, eundem numerum sine ulla varietate restituent.

CAPUT X.

De numero pariter impari ejusque proprietatibus.

Pariter autem impar numerus est qui et ipse quidem paritatis naturam substantiamque sortitus est, sed in contraria divisione, naturæ numeri pariter paris opponitur. Docebitur namque quam longe hic dissimili ratione dividatur. Nam quoniam par est, in

A partes æquales recipit sectionem, partes vero ejus mox indivisibiles atque insecabiles permanebunt, ut sunt 6, 10, 14, 18, 22, et his similes. Mox enim hos numeros si in gemina fueris divisione partitus, incurris in imparem, quem secare non possis. Accidit autem his quod omnes partes contrarie denominatas habent, quam sunt quantitates ipsarum partium quæ denominantur. Neque unquam fieri potest ut quælibet pars hujus numeri ejusdem generis denominationem quantitatemque suscipiat. Semper enim si denominatio fuerit par, quantitas partis erit impar, et si fuerit denominatio impar, quantitas erit par, ut in 18. Secunda ejus pars est, id est media, quod paritatis nomen est 9, quæ impar est quantitas. Tertia vero quæ impar est denominatio sex, cui par pluralitas est. Rursus si convertas, sexta pars quæ par est denominatio, tres sunt, sed ternarius impar est. Et nona pars, quod impar est vocabulum, 2 qui par numerus est. Atque idem in aliis cunctis qui sunt pariter impares invenitur. Neque unquam fieri potest, ut cujuslibet partis, sit ejusdem generis nomen et numerus. Fit autem horum procreatio numerorum, si ab uno disponantur, quicumque duobus differunt, id est omnibus imparibus naturali sequentia atque ordine constitutis. Namque hi si per binarium numerum multiplicentur, omnes pariter impares, rite pluralitas dimensa efficiet. Ponatur enim prima unitas, id est 1, et post hanc qui ab hac duobus differt, id est 3, et post hunc qui rursus a superiore duobus, id est 5, et hoc in infinitum. Et sit hujusmodi dispositio C 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Ii ergo naturaliter sequentes impares sunt, quos nullus in medio par numerus distinguit: hos si per binarium numerum multiplices, efficiet hoc modo, bis unum, id est qui dividitur quidem, sed ejus partes indivisibiles reperiuntur propter insecabilis unitatis naturam. Bis 3, bis 5, bis 7, bis 9, bis 11, et deinceps, ex quibus nascuntur hi, 2, 6, 10, 14, 18, 22. Quos si divides, unam recipiunt sectionem, cæteram repudiantes, quod secunda divisio ab imparis medietate partis excluditur. His autem numeris ad se invicem quaternarii sola distantia est. Namque inter 2 et 6 numeros, 4 sunt. Rursus inter 6 et 10, et inter 10 et 14, et inter 14 et 18, idem quaternarius differentiam facit. Hi namque omnes quaternaria sese numerositate D transcendunt. Quod idcirco contingit, quoniam primi qui positi sunt, hoc est eorum fundamenta, binario se numero præcedebant, quos quoniam per binarium multiplicavimus, in quaternarium numerum crevit illa progressio. Duo enim per bis multiplicati quaternarii faciunt summam. Igitur in naturalis numeri dispositione, pariter impares numeri quinto loco a se distant, solis 4 se præcedunt, 3 in medio transeuntes, per binarium numerum multiplicatis imparibus, procreati. Contrariæ vero esse dicuntur hæc species numerorum, id est pariter par, et pariter impar, quod in numero pariter impari sola divisionem recipit major extremitas, in illo vero solus minor terminus sectione solutus est, et quod in forma pariter paris nu-

meri ab extremitatibus incipienti, et usque ad mediu
 progredienti, quod continetur sub extremis terminis,
 idem est illi quod continetur sub intra se positis sum-
 mulis. Atque hoc idem usque dum ad duas medietate
 fuerit ventum, in dispositionibus scilicet paribus.
 Si autem fuerint impares dispositiones, quod ab una
 medietate conficitur, hoc idem sub altrinsecus posi-
 tis partibus procreatur. Atque hoc usquedum ad ex-
 tremitates processio fiat. In ea enim dispositione quæ
 est 2, 4, 8, 16, idem reddunt 2 per 16 multiplicati,
 quod 4 per octonarium numerum ducti. Utroque enim
 modo 32 fient. Quod si impar sit ordo, ut est 2, 4,
 8, idem facient extremi quod medietas. Bis enim 8
 sunt 16, quatuor quater sunt 16, qui numerus a qua-
 ternario in se ducto perficitur. In numero vero pariter
 impari, si fuerit unus in medio terminus, circum
 se positorum terminorum si in unum redigantur medi-
 etas est. Et idem eorum quoque qui super hos sunt
 terminos medietas est. Atque hoc usque ad extremos
 omnium terminorum, ut in eo ordine qui est pariter
 imparium numerorum 2, 6, 10, junctus binarius cum
 denario 12 explet, cujus senarius medietas inveni-
 tur. Si vero fuerint duæ medietates junctæ, ipsæ
 utræque æquales erunt super se terminis constitutis.
 Ut est in hoc ordine, 2, 6, 10, 14. Juncti enim 2 et
 14, in 16 crescunt, quos senarius cum denario copu-
 latus efficit. Atque hoc in numerosioribus terminis
 in'tio sumpto a mediis evenit, usque dum ad extrema
 veniatur.

CAPUT XI.

*De numero impariter pari ejusque proprietatibus, et
 descriptionis ad impariter paris, in latitudine, in
 longitudine, ad pariter paris naturam pertinentis,
 expositio.*

Impariter par numerus est ex utrisque confectus,
 et medietatis loco gemina extremitate concluditur,
 ut qua ab utroque discrepet, eadem ad alterutrum
 cognatione jungatur. Hic autem talis est qui dividi-
 tur in æquas partes, cujusque pars in alias æquas di-
 vidi potest, et etiam aliquando partes partium divi-
 dentur, sed non ut usque ad unitatem progrediatur
 æquabilis illa distinctio, ut sunt 24 et 28. Hi enim pos-
 sunt in medietates dividi, et eorum rursus partes in
 alias medietates, sine aliqua dubitatione solvuntur.
 Sunt etiam quidam alii numeri, quorum partes alias
 recipiunt divisiones, sed ipsa divisio ad unitatem
 usque non pervenit. Igitur in eo quod plus quam unam
 suscipit sectionem, habet similitudinem pariter paris,
 sed a pariter impari segregatur. In eo vero quod us-
 que ad unum sectio illa non ducitur, pariter imparem
 non refutat, sed a pariter pari disjungitur. Contingit
 autem huic numero et utraque habere quæ superio-
 res non habent, et utraque quæ illi recipiunt obti-
 nere. Et habet quidem quod utrique non habent,
 quod cum in uno solus major terminus divideretur,
 in alio vero solus minor terminus non divideretur,
 in hoc neque solus major terminus divisionem reci-
 pit, neque minor solus terminus a divisione sejungit-
 tur. Nam et partes solvuntur, et usque ad unitatem

A sectio illa non pervenit, sed ante unitatem invenitur
 terminus, quem secare non possis. Obtinet autem
 quæ illi quoque recipiunt, quod quædam partes ejus
 respondent, denominanturque secundum genus suum
 ad propriam quantitatem, ad similitudinem, scilicet
 pariter paris numeri. Aliæ vero partes contrariam
 denominationem sumunt propriæ quantitatis, ad pa-
 riter imparis scilicet formam. In 24 enim numero,
 par est quantitas partis a pari numero denominata.
 Nam quarta 6, secunda vero 12, sexta vero 4, duo-
 decima 2, quæ vocabulo partium a quantitatis paritate
 non discrepant. Contrariæ vero denominantur,
 cum tertia pars octo, octava vero 3, vigesima autem
 quarta 1, quæ denominationes cum pares sint inve-
 niuntur impares quantitates, et cum sint pares sum-
 mæ, sunt impares denominationes. Nascuntur autem
 tales numeri ita, ut substantiam naturamque suam
 in ipsa etiam propria generatione designent, ex pari-
 ter paribus et pariter imparibus procreati. Pariter
 enim impares, cunctis dudum ordinatim positis im-
 paribus, nascebantur, pariter vero pares ex duplici
 progressionem. Disponantur igitur omnes in ordinem
 naturaliter impares, et sub his a quatuor inchoantes
 omnes duplices, et sint hoc modo :

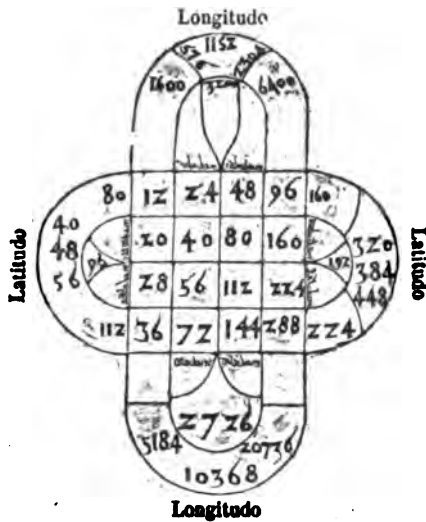
5	5	7	9	11	13
4	8	16	32	64	128

His igitur ita positis, si primus primi multiplicatione
 concreseat, id est si quaternarii ternarius, vel si idem
 primus secundi, id est octonarii ternarius, vel si
 idem primus tertii, id est 16 ternarius, et idem usque
 ad ultimum, vel si secundus primi et secundi, vel si
 secundus tertii, et eadem usque ad extremum multi-
 plicatio proferatur, vel si tertius a primo inchoans
 usque in extremum transeat. Atque ita quartus et
 omnes in ordinem superiores multiplicent eos qui sub
 ipsis in dispositione sunt, omnes impariter pares
 procreabunt. Hujus autem rei tale sumamus exem-
 plum, si tres quater multiplices, 12 fient; vel si 5
 quatuor multiplicent, 20 numerus excrescet; vel si
 item 7 multiplicent 4, 28 succrescet, atque hoc usque
 in finem. Rursus si 8 multiplicent 3, nascentur 24.
 Si 8 in 5, fiunt 40; si 8 in 7, colligentur 56. Atque
 ad hunc modum si omnes inferiores duplices, a su-
 perioribus multiplicentur, vel si superiores eosdem
 inferiores multiplicent, cunctos qui nati fuerint im-
 pariter pares invenies. Atque hæc est admirabilis
 hujus numeri forma, quod cum fuerit ipsa dispositio
 descriptioque perspecta numerorum, ad latitudinem
 pariter imparium, ad longitudinem pariter parium
 numerorum proprietas invenitur. Sunt enim in latitu-
 dinem duabus medietatibus æquales duæ extremita-
 tes, vel una medietate duæ duplices extremitates. In
 longitudinem vero, pariter paris numeri rem proprie-
 tatemque designat. Quod enim sub duabus medietati-
 bus continetur, æquale est ei quod sub extremis
 conficitur, vel quod ab una medietate nascitur, æquale
 est illi quod sub utrisque extremitatibus continetur.
 Descriptio autem quæ supposita est, hoc modo facta
 est. Quotoscunque in ordine pariter parium nume-

rorum ternarius multiplicavit, quicumque ex eo procreati sunt, primo sunt versu dispositi. Rursus qui eosdem multiplicante quinario nati sunt, secundo loco constituti sunt. Post vero quos septenarius ceteros multiplicando procreavit, eosdem tertio conscripsimus loco, atque idem reliqua descriptionis parte perfecimus.

In hac formula sequenti, similitudo pariter paris et pariter imparis, ad impariter parem, ostenditur.

3	5	7	9	Impares.
4	8	16	32	Dupli.



CAPUT XII.

Descriptionis ad impariter paris, in latitudine, in longitudine, ad pariter paris naturam pertinentis expositio.

Superius igitur digestæ descriptionis hæc ratio est. Si ad latitudinem respicias, ubi est duorum terminorum una medietas, ipsosque terminos jungas, duplos eos medietate propria reperies, ut 36 et 20 faciunt 56, quorum medietas est 28, qui medius est inter eos terminus constitutus. Et rursus 28 et 12, si jungas, faciunt 40, quorum 20 medietas, medius eorum terminus invenitur. At vero ubi duas medietates habent, utraq; extremitates junctæ, utrisque medietatibus æquales sunt, ut 12 et 36 cum junxeris fiunt 48, horum si medietates sibimet applicaveris, id est 20 et 28, idem erit, atque in alia parte latitudinis, eodem ordine qui sunt numeri, notati sunt. Neque ulla in ratio utrisque latitudinis discrepabit, idemque in eodem ordine in cæteris numeris pernotabis, et hoc recundum formam pariter imparis numeri fit, in quo hanc proprietatem esse supra jam scriptum est. Rursum si ad longitudinem respicias, ubi duo termini unam medietatem habent, quod fit ex multiplicatis extremitatibus, hoc fit si medius terminus suæ capiat pluralitatis augmenta. Nam duodecies 48 faciunt 576. Medius vero eorum terminus, id est 24, si multiplicetur, eosdem rursus 576 procreabit. Et rursus si 24 in 96 multiplicentur, faciunt 2304. Quorum me-

dius terminus, id est 48, si in semetipsum decatur, idem 2304 procreatur. Ubi autem termini duo duas medietates includunt, quod fit multiplicatis extremitatibus, hoc idem redditur in alterutram summam medietatibus ductis. Duodecies enim 96 multiplicatis 1152 procreantur, dum vero eorum medietates, id est 24 et 48, si in semetipsas multiplicentur, eosdem 1152 restituent. Atque hoc est, ad imitationem cognitionemque numeri pariter paris, a quo participatione tracta, hæc ei recognoscitur ingenerata proprietates. Et in alio vero latere longitudinis, eadem ratio descriptioque notata est. Quare manifestum est hunc numerum ex prioribus duobus esse procreatum, quoniam eorum retinet proprietates.

B

CAPUT XIII.

De numero impari ejusque divisione

Impar quoque numerus est, qui a paris numeri natura substantiaque disjunctus est. Siquidem ille in gemina membra æqua dividi potest, hic ne secari queat, unitatis impedit interventus. Tres habet similiter subdivisiones, quarum una ejus pars est is numerus qui vocatur primus et incompositus. Secunda vero, qui est secundus et compositus. Et tertia is qui quadam horum medietate conjunctus est, et ab utrisque cognitione aliquid naturaliter trahit, qui est per se quidem secundus et compositus, sed ad alios comparatus, primus et incompositus invenitur.

C

CAPUT XIV.

De primo et incomposito.

Et primus quidem et incompositus est, qui nullam aliam partem habet, nisi eam quæ a tota numeri quantitate denominata sit, ut ipsa pars non sit nisi unitas, ut sunt 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. In his ergo singulis nulla unquam alia pars invenietur, nisi quæ ab ipsis denominata est, et ipsa tantum unitas, ut supra jam dictum est. In tribus enim una pars sola est, id est tertia, quæ a tribus scilicet denominata est, et ipsa tertia pars unitas. Eodemque modo quinary sola quinta pars est, et hæc unitas, atque idem in singulis consequens reperietur. Dicitur autem primus et incompositus, quod nullus eum alter numerus metiatur, præter solam, quæ cunctis mater est, unitatem. Namque ternarium 2 non numerant, idcirco quoniam si solos duos contra tres compares, pauciores sunt. Sin vero binarium bis facias, ampliorem tribus concrecit in 4. Melius autem numerus numerorum, quoties vel semel, vel bis, vel tertio, vel quotieslibet numerus ad numerum comparatus, neque diminuta summa, neque aucta, ad comparati numeri terminum usque pervenit, ut duo si ad 6 compares, binarius numerus senarium tertio metietur. Primos ergo et incompositos nullus numerus metietur, præter unitatem solam, quoniam ex nullis aliis numeris compositi sunt, sed tantum ex unitatibus in semetipsis auctis multiplicatisque procreantur. Ter enim unus 3, et quinquies unus 5, et septies unus 7 fecerunt. Et alii quidem, quos supra descripsimus, eodem modo

nascuntur. Hi autem in semetipsos multiplicati faciunt alios numeros velut primi, eosque primarum substantiam vimque sortitos, eunctorum a se procreatorum velut quædam elementa reperies, quia scilicet, et incompressi sunt, et simplici generatione formati, atque in eos omnes quicumque ex his prolati sunt numeri resolvuntur, ipsi vero neque ex aliis producuntur, neque in alia reducuntur.

CAPUT XV.

De secundo et composito.

Secundus vero et compositus, et ipse quidem impar est, propterea quod eadem imparis proprietate formatus est, sed nullam in se retinet substantiam principalem, compositusque est ex aliis numeris, habetque partes, et a seipso et ab alieno vocabulo denominatas, sed a se ipso denominatam partem, solam semper in his invenies unitatem, ab alieno vero vocabulo, vel unam, vel quodlibet alias, quanti fuerint scilicet numeri quibus ille compositus procreatur, ut sunt hi, 9, 15, 21, 25, 27, 35, 39. Horum ergo singuli habent quidem a se denominatas partes, proprias scilicet unitates, ut 9, nonam, id est 1; 15, quintam decimam, eandem rursus unitatem, et in cæteris quos supra descripsimus idem convenit. Habent etiam ab alieno vocabulo partem, ut 9, tertiam, id est ternarium, et 15, tertiam, id est 5, et quintam, id est, 3; 21 vero tertiam, id est 7, septimam, 3, et in omnibus aliis eadem consequentia est. Secundus autem vocatur hic numerus, quoniam non sola unitate metitur, sed etiam alio numero a quo scilicet conjunctus est. Neque habet in se quidquam principalis intelligentiæ. Nam ex aliis numeris procreatur, 9 quidem ex 3, 15 vero ex 3 et 5, et 21 ex 3 et 7, et cæteri eodem modo. Compositus autem dicitur, eo quod resolvitur potest in eosdem ipsos a quibus dicitur esse compositus, in eos scilicet qui compositum numerum metiuntur. Nihil autem quod dissolvi potest incompositum est, sed omni rerum necessitate compositum.

CAPUT XVI.

De eo qui per se secundus et compositus, ad alium primus et incompositus est.

His vero contra se positus, id est primo et incomposito, et secundo et composito, et naturali diversitate disjunctis, alius in medio consideratur, qui ipse quidem compositus sit, et secundus, et alterius recipiens mentionem, atque ideo, et partis alieni vocabuli capax, sed cum fuerit ad alium ejusdem generis numerum comparatus, nulla cum eo communi mensura conjungitur, nec habebunt partes æquivocas, ut sunt 9 ad 25, nulla hos communis numerorum mensura metitur, nisi forte unitas quæ omnium numerorum mensura communis est. Et hi quidem non habent æquivocas partes. Nam quæ in 9 tertia est, in 25 non est, et quæ in 25 quinta est, in novenario non est. Ergo hi per naturam utriusque secundi et compositi sunt, comparati vero ad se invicem primi incompositique redduntur, quod utrosque nulla alia mensura metitur, nisi unitas quæ ab utrisque deno-

minata est. Nam in novenario nona est, in 25 vigesima quinta.

CAPUT XVII.

De primi et incompressi, secundi et compositi, et ad se quidem secundi et compositi, ad alterutrum vero primi et incompressi procreatione.

Generatio autem ipsorum atque ortus hujusmodi investigatione colligitur, quam scilicet Eratosthenes cribrum nominabat, quod cunctis imparibus in medio collocatis, per eam quam tradituri sumus artem, qui primi, quive secundi, quique tertii generis videantur esse, distinguitur. Disponantur enim a ternario numero cuncti in ordinem impares, in quamlibet longissimam porrectionem, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49. His igitur ita dispositis considerandum primus numerus quem eorum qui sunt in ordine positi primum metiri possit, sed duobus præteritis, illum qui post eos est positus, mox metitur. Et si post eundem ipsum quem mensus est, alii duo transmissi sunt, illum qui post duos est rursus metitur. Et eodem modo si duos quis reliquerit, post eos qui est, a primo numero metiendus est. Eodemque modo relictis semper duobus, a primo in infinitum pergentes metientur. Sed id non vulgo neque confuse. Nam primus numerus illum qui est post duos secundum se locatos per suam quantitatem metitur. Ternarius enim numerus tertio 9 metitur. Si autem post novenarium duos reliquero, qui mihi post illos incurverit, a primo metiendus est, per secundi imparis quantitatem, id est per quinariam. Nam si post 9 duos relinquam, id est, 11 et 13, ternarius numerus 15 metietur per secundi numeri quantitatem, id est per quinarii, quoniam ternarius 15 quinquies metitur. Rursus si, a quindenario inchoans, duos intermisero, qui posterior positus est, ejus primus numerus, mensura est per tertii imparis pluralitatem. Nam si post 15 intermisero 17 et 19, incurrit 21, quem ternarius numerus secundum septenarium metitur, 21 enim numeri ternarius septima pars est. Atque hoc in infinitum faciens, reperio primum numerum, si binos intermisero, omnes sequentes post se metiri secundum quantitatem positorum ordine imparium numerorum. Si vero quinarius numerus, qui in secundo loco est constitutus, velit quis cujus prima ac deinceps sit mensura invenire, transmissis 4 imparibus, quintus ei, quem metiri possit, occurrit. Intermittantur enim 4 impares, id est 7 et 9 et 11 et 13, post hos est quintus decimus, quem quinarius metitur, secundum primi scilicet quantitatem, id est ternarii, quinque enim 15, tertio metiuntur. Ac deinceps si quatuor intermittat, eum qui post illos locatus est, secundus, id est quinarius sui quantitate metitur. Nam post quindecim intermissis 17 et 19 et 21 et 23, post eos 25 reperio, quos quinarius scilicet numerus sua pluralitate metitur. Quinquies enim quinarius multiplicato, 25 succrescunt. Si vero post hunc quilibet 4 intermittat, eadem ordinis servata constantia, qui eos sequitur, secundum tertii, id est septenarii

numeri suam, a quinario metietur. Atque hæc est infinita processio. Si vero tertius numerus quem metiri possit exquiratur, sex in medio relinquuntur, et quem septimum ordo monstraverit, hic per primi numeri, id est, ternarii quantitatem metiendus est. Et post illum sex aliis interpositis, quem post eos numeri series dabit, per quinarium, id est per secundum, tertii eum mensura percurret. Si vero alios rursus sex in medio quis relinquat, ille qui sequitur, per septenarium numerum ab eodem septenario metiendus est, id est per tertii quantitatem. Atque hic usque in extremum rarus ordo progreditur. Suscipient ergo metiendi vicissitudinem, quemadmodum sunt in ordinem naturaliter impares constituti. Metientur autem, si per pares numeros a binario inchoantes, positos inter se impares rata intermissione transiliant, ut primus 2, secundus 4, tertius 6, quartus 8, quintus 10. Vel si locos suos conduplicent, et secundum duplicationem terminos intermittant, ut ternarius qui primus est numerus et unus (omnis enim primus, unus est), bis locum suum multiplicet, faciatque bis unum. Qui cum duo sint, primus duos medios transeat. Rursus secundus, id est quinarium, si locum suum duplicet, 4 explicabit: hic quoque 4 intermittat. Item si septenarius, qui tertius est, locum suum duplicet, sex creabit: bis enim 3 senarium jungunt; hic ergo in ordinem sex relinquat. Quartus quoque si locum suum duplicet, 8 succrescent: ille quoque 8 transiliet; atque hoc quidem in cæteris perspicendum. Modum autem mentionis secundum ordinem collocatorum ipsa series dabit. Nam primus, primum quem numerat, secundum primum numerat, id est secundum se, et secundum primum quem numerat, per secundum numerat, et tertium per tertium, et quartum item per quartum. Cum autem secundus mentionem susceperit, primum, quem numerat, secundum primum metitur, secundum vero quem numerat, per se, id est per secundum, et tertium per tertium, et in cæteris eadem similitudine mensura constabit. Alios ergo si respicias, vel qui alios mensi sunt, vel qui ipsi ab aliis metiuntur, invenies omnium simul communem mensuram esse non posse, neque ut omnes quemquam alium simul numerent, quosdam autem ex his ab alio posse metiri, ita ut ab uno tantum numerentur, alios vero ut etiam a pluribus, quosdam autem ut præter unitatem eorum nulla mensura sit. Qui ergo nullam mensuram præter unitatem recipiunt, hos primos et incompositos judicamus, qui vero aliquam mensuram præter unitatem, vel alienigenæ partis vocabulum sortiuntur, eos pronuntiemus secundos atque compositos. Tertium vero illud genus per se secundi et compositi, primi vero et incompositi ad alterutrum comparati, hac inquisitor ratione reperiet. Si enim quoslibet illos numeros secundum suam in semetipsos multiplices quantitatem, qui procreantur ad alterutrum comparati, nulla mensura communione junguntur. Tres enim et 5 si multiplices, tres tertio 9 faciunt, et quinquies 5 reddent 25. His igitur nulla

A est cognatio communis mensuræ. Rursus 5 et 7, quos procreant si compares, hi quoque incommensurabiles erunt. Quinquies enim quique (ut dictum est) 25, septies 7 faciunt 49. Quorum mensura nulla communis est, nisi forte omnium horum procreatrix et mater unitas.

CAPUT XVIII.

De inventione eorum numerorum, qui ad se secundi et compositi sunt, ad alios vero relati, primi et incompositi.

Qua vero ratione tales numeros invenire possimus, si quis nobis eosdem proponat, et imperet agnoscere utrum aliqua mensura commensurabiles sint, an certe sola unitas utrosque metiatur, reperiendi ars talis est. Datis enim duobus numeris inæqualibus, auferre de majore minorem oportebit, et qui relictus fuerit, si major est, auferre ex eo rursus minorem, si vero minor fuerit, eum ex reliquo majore detrachere. Atque hoc eo usque faciendum, quoad unitas ultima vicem retractionis impediatur, aut aliquis numerus impar necessario, si utriusque numeri impares proponantur. Sed eum qui relinquitur numerum, sibi ipsi videbis æqualem. Ergo si in unum incurrat vicissim ista subtractio, primi contra se necessario numeri dicentur, et nulla alia mensura nisi sola unitate conjuncti. Si vero ad aliquem numerum (ut superius dictum est) finis diminutionis incurrerit, erit ejus numerus qui metiatur utrasque summas, atque eundem ipsum qui remanserit dicemus utrorumque communem esse mensuram. Age enim duos numeros propositos habeamus, quos jubeamur agnoscere an eos aliqua mensura communis metiatur. Atque hi sint 9 scilicet et 29, hoc igitur faciemus modo reciprocam diminutionem. Auferamus de majore minorem, hoc est de 29 novenarium, relinquuntur 20. Ex his ergo 20 rursus minorem detrahamus, id est 9, et relinquuntur 11. Ex his rursus detraho 9, relictus sunt 2. Quos si detraho novenario, et relictus sunt 7. Quod si duo rursus septenario dempserim, supersunt 5, atque ex his alios duos, tres rursus exuberant, quos alio binario diminutos, sola unitas superstes egreditur. Rursus si ex duobus unum auferam, in uno terminus detractionis hærebit, quem duorum illorum numerorum, id est 9 et 29, solum neque aliam constat esse mensuram. Hos ergo contra se primos vocabimus. Sed sint alii numeri nobis eadem conditione propositi, id est 21 et 9, ut quales hi sint investigentur cum sibi met fuerint invicem comparati. Rursus aufero de majore minoris numeri quantitatem, id est 9 de 21, relinquuntur 12. Ex his rursus demo 9, supersunt 3. Qui si ex novenario retrahantur, senarius relinquetur. Quibus item si quis ternarium demat, 3 relinquuntur, de quibus tres detrahi nequeunt, atque hic est sibi ipsi æqualis. Nam 3 qui detrahebantur, usque ad ternarium numerum pervenerunt, a quo, quoniam æquales sunt, detrahi minuique non poterunt. Hos igitur commensurabiles pronuntiabimus, et est eorum qui est reliquus ternarius mensura communis.

CAPUT XIX.

Alia partitio paris secundum perfectos, imperfectos et ultra quam perfectos.

Ac de imparibus numeris, quantum introductionis permittit brevitas, expeditum est. Rursus numerorum parium sic fit secunda divisio. Alii enim eorum sunt superflui, alii diminuti, secundum utrasque habitudines inæqualitatis. Omnis quippe inæqualitas, aut in majoribus, aut in minoribus consideratur. Illi enim immoderata quodammodo plenitudine, proprii corporis modum, partium suarum numerositate præcedunt. Illos autem veluti paupertate inopes oppressosque, quadam naturæ suæ inopia, minor quam ipsi sunt partium summa componit, atque illi quidem quorum partes ultra quam satis est sese porrexerunt, superflui nominantur, ut sunt 12 vel 24. Hi enim suis partibus comparati, majorem partium summam toto corpore sortiuntur. Est enim duodenarii medietas 6, pars tertia 4, pars quarta 3, pars sexta 2, pars duodecima 1 est. Omnisque hic cumulus redundat in 16, et totius corporis sui multitudinem vincunt. Rursus 24 numeri medietas est 12, tertia 8, quarta 6, sexta 4, octava 3, duodecima 2, vicesima quarta 1, qui omnes triginta et sex rependant. In qua re manifestum est quod summa partium major est, et supra proprium corpus exundat. Atque hic quidem quoniam compositæ partes totius summam numeri vincunt, superflui appellatur. Diminutus vero ille, cujus eodem modo compositæ partes totius termini multitudine superantur, ut 8 vel 9: habet enim octonarius partem mediam, id est 4; habet et quartam, id est duo; habet et octavam, id est unum, quæ cunctæ in unum reductæ 7 colligunt, minorem scilicet summam toto corpore concludentes. Rursus 14 habent medietatem, id est septenarium; habent septimam, id est 2; habent quartam decimam, id est 1, quæ in unum si collectæ sint, denarii numeri summa concrescit, toto scilicet termino minor. Atque hi quidem hoc modo sunt, ut prior ille quem suæ partes superant talis videatur, tanquam si quis multis super naturam manibus natus, ut centimanus Gigas, vel triplici conjunctus corpore, ut Geryon tergeminus, vel quidquid unquam monstruosum natura in partium multiplicatione surripuit. Ille vero ut si naturaliter quadam necessaria parte detracta, aut minus oculo nasceretur, ut Cyclopeæ frontis dedecus fuit, vel quo alio eurtatus membro, naturale totius suæ plenitudinis dispendium sortiretur. Inter hos autem, velut inter æquales intemperantias, medii temperamentum limitis sortitus est ille numerus qui perfectus dicitur, virtutis scilicet æmulator, qui nec supervacua progressionem porrigitur, nec contracta rursus diminutione remittitur, sed medietatis obtinens terminum, suis æquus partibus, nec crassatur abundantia, nec eget inopia, ut sex vel 28. Namque senarius habet partem mediam, id est 3, et tertiam, id est 2, et sextam, id est 1, quæ in unam summam si reductæ sint, par totum numeri corpus suis partibus invenitur. 28 vero habet medietatem 14, et

A septimam 4, nec caret quarta, id est 7, possidet quartam decimam 2, et reperies in eo vicesimam octavam 1, quæ in unum reductæ, totum partibus corpus æquabunt, 28 enim junctæ partes efficiunt.

CAPUT XX.

De generatione numeri perfecti.

Est autem in his quoque magna similitudo virtutis et vitii. Perfectos enim numeros raro invenies, eosque facile numerabiles, quippe qui pauci sunt, et nimis constanti ordine procreati; at vero superfluos ac diminutos longe multos infinitosque reperies, nec ullis ordinibus passim inordinateque dispositos, et a nullo certo fine generatos. Sunt autem perfecti numeri, intra denarium numerum 6, intra centenarium 28, intra millenarium numerum 496, intra decem millia 8128. Et semper hi numeri duobus paribus terminantur 6 et 8, et semper alternatim in hos numeros, summarum fines perveniunt. Nam et primum sex, deinde 28. Post hos 496, idem senarius qui primus, post quem 8128, idem octonarius qui secundus. Generatio autem procreatioque eorum est fixa firmaque, nec quo alio modo fieri possint, nec ut si hoc modo fiant, aliud quiddam ullo modo valeat procreari. Dispositos enim ab uno omnes pariter pares numeros in ordinem quousque volueris, primo secundum aggregabis, et si primus numerus et incompositus ex illa coacervatione factus sit, totam summam in illum multiplicabis, quem posterius aggregaveras. Si vero coacervatione facta, primus et incompositus non inventus fuerit, sed compositus et secundus, hunc transgredere, atque alium qui sequitur aggregabis. Si vero necdum fuerit primus et incompositus, alium rursus adijunge, et vide quid fiat. Quod si primum incompositumque reperies, tunc in ultimæ multitudinem summæ coacervationem multiplicabis. Disponentur enim omnes pariter pares numeri, hoc modo: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Facies ergo ita: pones 1, etque aggregabis 2; tunc respicies ex hac aggregatione qui numerus factus sit: sunt 3, qui scilicet primus et incompositus est, et post unitatem ultimum binarium numerum aggregaveras. Si igitur ternarium, id est qui ex coacervatione collectus est, per binarium multiplices, qui est ultimus aggregatus, perfectus sine ulla dubitatione nascetur. Bis enim 3 faciunt 6, qui habent unam quidem a se denominatam partem, id est sextam, tres vero medietatem secundum dualitatem, at vero duo secundum coacervationem, id est secundum ternarium, quoniam coacervati tres, multiplicati sunt. Viginti octo autem eodem modo nascuntur. Si enim super unum et duo, qui sunt tres, addas sequentem pariter parem, id est 4, septenariam summam facies; sed ultimum numerum quaternarium consequenter adijunxeris; per hunc igitur si illam coacervationem multiplicaveris, perfectus numerus procreatur. Septies enim 4, 28 sunt, qui est suis partibus par, habens unum a se denominatum, id est vigesimum octavam; medietatem vero secundum binarium 14, secundum quaternarium 7, septimam vero secundum septenarium 4, secundum

omnium collectionem, quartum decimum, duo, qui A
vocabulo medietatis opponitur. Ergo cum hi reperti
sint, si alios invenire secteris, eadem oportet ratione
ut vestiges. Ponas enim unum licebit, et post hunc
2 et 4, qui in septenarium cumulantur, sed de hoc
dudum exstitit 28 perfectus numerus. Huic igitur qui
sequitur pariter par, id est 8, continens jungatur ac-
cessio, qui prioribus superveniens, 15 restituit. Sed
hic primus et incompositus non est. Habet enim generis
alterius partem super illam, quæ est a semetipsa
denominata, quintam decimam, scilicet unitatem.
Hunc igitur, quoniam secundus est compositus præ-
terito, et adijunge superioribus continentem pariter
parem numerum, id est 16. Qui cum 15 junctus,
unum ac 30 conficiet. Sed hic primus rursus et incom-
positus est. Hunc igitur cum extremi aggregati sum-
ma multiplicata, ut fiant sedecies 31, qui 496 explicant.
Hæc autem est intra millenarium numerum perfecta,
et suis partibus æqua numerositas. Igitur prima uni-
tas virtute atque potentia, non etiam actu vel re, et
ipsa perfecta est. Nam si primam ipsam sumpsero de
proposito ordine numerorum, video primam atque
incompositam, quam si per seipsam multiplico, eadem
mihî unitas procreatur. Semel enim unum solam
efficit unitatem, quæ partibus suis æqualis est po-
tentia solum, cæteris etiam actu atque opere perfectis.
Recte igitur unitas propria virtute perfecta est, quod
et prima est et incomposita, et per seipsam multipli-
cata sese ipsa conservat. Sed quoniam de ea quan-
titate quæ per se sit dictum est, operis sequentiam
ad illam quæ refertur ad aliquid transferamus.

CAPUT XXI.

De relata ad aliquid quantitate.

Ad aliquid vero quantitatis, duplex est prima divi-
sio. Omne enim, aut æquale est, aut inæquale, quid-
quid alterius comparatione metitur. Et æquale quidem
est, quod ad aliquid comparatum, æque minore sum-
ma infra est, neque majore transgreditur, ut dena-
rius denario, vel ternarius ternario, vel cubitum cu-
bito, vel pes pedi, et his similia. Hæc autem pars
relatæ ad aliquid quantitatis, id est, æqualitas, natu-
raliter indivisa est. Nullus enim dicere potest quod
æqualitatis hoc quidem tale est, illud vero hujusmodi.
Omnis enim æqualitas unam servat in propria mo-
deratione mensuram. Illud etiam quod quæ ei quan-
titas comparatur, non alio vocabulo atque ipsa cui
comparatur edicitur. Nam quemadmodum amicus
amico amicus est, vicinusque vicino, ita dicitur
æqualis æquali. Inæqualis vero quantitatis gemina
divisio est. Secatur enim quod inæquale est in ma-
jus atque minus, quæ contraria sibi met denominatione
funguntur. Namque majus minore majus est,
et minus majore minus est, et utraque non eisdem
vocalibus, quemadmodum secundum æqualitatem
dictum est, sed diversis distantibusque signata sunt,
ad modum discentis scilicet, vel docentis, vel cæden-
tis, vel vapulantis, vel quæcunque ad aliquid relata,
aliter denominatis contrariis comparantur.

CAPUT XXII.

De speciebus majoris inæqualitatis et minoris.

Majoris vero inæqualitatis quinque partes sunt.
Est enim una quæ vocatur multiplex, alia superpar-
ticularis, tertia superpartiens, quarta multiplex su-
perparticularis, quinta multiplex superpartiens. His
igitur quinque majoris partibus, oppositæ sunt aliæ
quinque partes minoris, quemadmodum ipsum majus
minori semper opponitur, quæ minoris species, ita
singillatim speciebus quinque majoris his quæ supra-
dictæ sunt opponuntur, ut eisdem nominibus nunc-
cupentur, sola tantum sub præpositione distantes.
Dicitur enim submultiplex, subsuperparticularis, sub-
superpartiens, multiplex subsuperparticularis, et
multiplex subsuperpartiens.

CAPUT XXIII.

De multiplici ejusque speciebus, earumque gene- rationibus.

Rursus multiplex est prima pars majoris inæquali-
tatis, cunctis aliis antiquior naturaque præstantior, et
paulo post demonstrabimus. Hic autem numerus hu-
jusmodi est, ut comparatus cum altero, illum contra
quem comparatus est, habeat plus quam semel. Quod
primum in naturalis numeri dispositione conveniet,
namque ad unum cuncti qui sequuntur, omnium or-
dine multiplicium sequentias varietatesque casto-
diunt. Ad primum enim, id est unitatem, 2 duplus,
3 triplus, 4 quadruplus, atque ita in ordinem progred-
ientes, omnes texuntur multiplices quantitates.
C Quod autem dictum est, plus quam semel, id a hinc
ratio numero principium capit, et in infinitum per ter-
narium quaternariumque, et cæterorum ordinem se-
quentiamque progreditur. Contra hunc vero discrimi-
natus est ille qui vocatur submultiplex, et hæc
quoque prima minoris quantitatis species est. Hic
autem numerus hujusmodi est, qui in alterius com-
paratione productus, plus quam semel majoris nume-
rat summam, sua scilicet quantitate cum eo æquali-
ter inchoans, æqualiterque determinans. Idem autem
dico numerat quod metitur. Si igitur bis solum ma-
jorem numerum minor numerus metiatur, subduplus
vocabitur, si vero ter subtriplus, si quater subqua-
druplus, et fit per hæc in infinitum progressio, addi-
taque eos semper sub propositione nominabis, ut unus
duorum subduplus, trium subtriplus, 4 subquadra-
plus appellatur, et consequenter. Cum autem natu-
raliter multiplicitas et submultiplicitas infinita sit,
eorum quoque species per proprias generationes in
infinita consideratione versantur. Si enim positus in
naturali constitutione numeris, singulos per suas con-
sequentias pares eligas, omnium ab uno parium atque
imparium sese sequentium duplices erant, et hujus
speculationis terminus non deficit. Ponatur enim na-
turalis numerus hoc modo, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Horum
ergo si primum sumas parem, id est 2, primi duplus
erit, id est unitatis. Si vero sequentem parem, id est
4, secundi duplus est, id est duorum. Si vero tertium

parem sumas, id est 6, tertii numeri in naturali constitutione duplus est, id est ternarii. Si vero quartum parem inspicias, id est 8, quarti numeri, id est quaternarii duplus est. Idemque in cæteris in insolutum summentibus, sine aliquo impedimento procedit. Triplices autem nascuntur, si in eadem dispositione naturali duo semper intermittantur, et qui post duo sunt ad naturalem numerum comparentur, excepto ternario, qui ut unitatis triplus sit, solum binarium prætermittit. Post unum et duo, 3 sunt, qui triplus unius est. Rursus post 4 et 5, sunt 6, qui secundi numeri, id est duorum triplus est. Rursus post 6, sunt 7 et 8, et post hos 9, qui tertii numeri, id est ternarii triplus est. Atque hoc idem in infinitum si quis faciat, sine ulla offensione procedit. Quadruplorum vero generatio incipit, si quis tres numeros intermittat. Post unum quippe et 2 et 3, sunt 4, qui primi, id est unius, quadruplus est. Rursus si intermisero quinarium, senarium, et septenarium, octonarius mihi quartus occurrit, tribus scilicet intermissis, qui binarii, id est secundi numeri, quadruplus est. At vero si post octo tres terminos intermisero, id est 9 et 10 et 11, duodenarius qui sequitur ternarii numeri quadruplus est. Atque hoc idem in infinitum progressis necesse est evenire, semperque una terminorum intermissione si crescat adjectio, ordinatas te multiplicis numeri vices invenire miraberis. Si enim 4 intermittas, quincuplus invenitur, si quinque sexcuplus, si sex septuplus, semperque ipsius multiplicis nomine uno minus intermissionis vocabulo procreantur. Nam duplus unum intermittit, triplus 2, quadruplus 3, quincuplus 4. Et deinceps ad eundem ordinem sequentia est. Et omnes quidem dupli secundum proprias sequentias parium numerorum pares sunt. Tripli vero, unus semper par terminus, impar alius invenitur. Quadrupli vero, rursus semper parem custodiunt quantitatem. Constituunturque a quarto numero, uno ex prioribus per ordinem positus paribus intermisso, primo pari binario, post hunc 8 intermisso senario, post hunc 12 transmissio denario. Atque hoc idem in cæteris. Quincupli vero propositio, secundum triplicis similitudinem, alternatim paribus atque imparibus positus, ordinatur.

CAPUT XXIV.

De superparticulari, ejusque speciebus, earumque generationibus.

Superparticularis vero est numerus ad alterum comparatus, quotiens habet in se totum minorem et partem ejus aliquam. Qui si minoris habeat medietatem, vocatur sesquialter, si vero tertiam partem, vocatur sesquitercius, si vero quartam, vocatur sesquiquartus, et si quintam, vocatur sesquiquintus. Atque his nominibus in infinitum ducis, in infinitum quoque superparticularium forma progreditur. Et majores quidem numeri hoc modo vocantur, minores vero qui habentur toti et eorum aliqua pars, unus subsesquialter, alter subsesquitercius, alius subsesquiquartus, alius vero subsesquiquintus, atque idem secundum majorum normam multitudinemque pro-

tenditur. Voco autem majores numeros duces, minores comites. Superparticularium quoque infinita est multitudo, ob eam rem quod ejusdem species interminabili progressionem funguntur. Namque sesquialter habebit quidem duces omnes post ternarium numerum naturaliter triplices. Comites vero, omnes post binarium naturaliter pares, hoc modo, ut primus primo, secundus secundo, tertius tertio comparetur, et deinceps. Describantur enim longissimi versus triplicium naturalis numeri atque duplicium, et sit hoc modo :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Primus igitur versus continet numerum naturalem, secundus ejus triplicem, tertius vero duplicem, atque in eo si ternarius binario, vel si senarius quaternario, vel novenarius senario comparetur, vel omnes triplices superiores si duplicibus numeris consequentibus opponantur, hemiolia, id est sesquialtera proportio nascetur, tres enim habent intra se duo, et eorum mediam partem, id est 1, sex quoque continent intra se 4, et eorum medietatem, id est 2, et novem intra se senarium claudunt, et ejus mediam partem, id est 3, eodemque modo in cæteris. Dicendum vero si quis secundam speciem superparticularis numeri considerare desideret, id est sesquiterciam, quali ratione reperiat. Ac definitio quidem hujus comparationis talis est. Sesquitercius est, qui minori comparatus, habet eum semel et ejus tertiam partem; sed hi inveniuntur si, omnibus a quaternario numero continuatim quadruplis constitutis, a ternario numero triplices comparentur, eruntque duces quadrupli, comites tripli. Sit enim in ordine hoc modo numerus naturalis, ut sub eo quadrupli, et sub eo tripli sint, supponitur sub primo quadruplo primus triplus, sub secundo secundus, sub tertio tertius, et eodem modo cuncti ejusdem primi versus tripli in ordinem dirigantur.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	8	12	16	20	24	28	32
3	6	9	12	15	18	21	24

Igitur primum primo si compares, sesquitercia ratio continebitur. Nam si 4 tribus compares, habebunt in se 4, totum ternarium et ejus tertiam partem, id est 1, et si secundum secundo, id est octonarium senario compares, idem inveniēs : habebit enim octonarius senarium totum, et ejus tertiam partem, id est 2, et per eandem sequentiam usque in infinitum progrediendum est. Notandum quoque est quod 3 comites sunt, duces 4. Rursus 6 comites, duces 8, et in eodem ordine cæteri simili modo vocantur duces sesquitercius, comites subsesquitercii, et in cunctis secundum hunc modum posita convenit servare vocabula.

CAPUT XXV.

De quodam utili ad cognitionem superparticularibus accidentis.

Hoc autem admirabile profundissimumque in istorum ordinibus invenitur, quod primus dux primus-

que comes ad se invicem nulla numeri intermissione copulantur. Nam primi se nullo in medio posito transeunt, secundi interponunt 1, tertii duos, quarti 3, et deinceps una semper minore quam ipsi sunt intermissione succrescunt. Atque hoc vel in sesquialteris, vel in sesquiterciis, vel in aliis superparticularibus partibus necesse est inveniri. Namque ut quaternarius contra ternarium comparatur, nullum intermisimus, post 3 enim mox 4 sunt. At vero 6 contra 8, in secundo scilicet sesquitercio, una facta est intermissio. Inter 6 enim et 8 solus est septenarius qui transmissus est numerus. Rursus ut 9 contra 12 comparemus, qui sunt in dispositione tertii, duorum mediorum est facta transmissio. Inter 9 enim et 12 sunt 10 et 11; secundum hunc modum quarta dispositio 3, quinta 4 intermittit.

CAPUT XXVI.

Descriptio per quam docetur cæteris inæqualitatis spe-

A *ciebus antiquiore:m esse multiplicem, et digestæ formulæ ratio et expositio.*

Quoniam autem naturaliter et secundum propriam ordinis consequentiam, multiplicem inæqualitatis speciem cunctis præposuimus, primamque speciem esse monstravimus, licet hoc nobis posterioris operis ordine clarescat, hic quoque perstringentes id quod proposuimus planissime breviterque doceamus. Sit enim talis descriptio, in qua ponatur in ordinem, usque ad denarium numerum, continui numeri ordo naturalis, et secundo versu, duplus ordo textatur, tertio triplus, quarto quadruplus, et hoc usque ad decuplum. Sic enim cognoscemus quemadmodum superparticulari et superpartienti, et cunctis aliis princeps erit species multiplicis, et quædam alia simul inspiciemus et ad subtilitatem tenuissima, et ad scientiam utilissima, et ad exercitationem mentis jocundissima.

B

		Tetragona				Longitudo				Secunda unitas		
Prima unitas	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	x	2	x 4	6	8	10	12	14	16	18	20	
		3	6	x 9	12	15	18	21	24	27	30	
		4	8	12	x 16	20	24	28	32	36	40	
		5	10	15	20	x 25	30	35	40	45	50	
	Latitudo		6	12	18	24	30	x 36	42	48	54	60
			7	14	21	28	35	42	x 49	56	63	70
			8	16	24	32	40	48	56	x 64	72	80
			9	18	27	36	45	54	63	72	x 81	90
			10	20	30	40	50	60	70	80	90	x 100
		Secunda unitas				Longitudo				Tertia unitas		
		Tetragona										

CAPUT XXVII.

Ratio atque expositio digestæ formulæ.

Si igitur duo prima latera propositæ formulæ quæ faciunt angulum, ab uno ad 10, et 10 procedentia respiciantur, et his subteriores ordines comparentur, qui scilicet a 4 angulum incipientes, in vigenos terminata ponunt, duplex, id est prima species multiplicis ostenditur, ita ut primus primum sola superet unitate, ut duo unum, secundus secundum binario supervadat, ut quaternarius binarium, tertius tertium tribus, ut senarius ternarium, quartus quartum, quaternarii numerositate transcendat, ut 8 quaternarium, et per eandem cuncti sequentiam sese minoris pluralitate prætereant. Si vero tertius angulus aspiciatur, qui ab 9 inchoans, longitudinem latitudinemque tricenis altrinecus numeris extendit, et

C hic cum prima latitudine et longitudine comparetur, triplex species multiplicis occurrit, ita ut ista comparatio per X litteram fiat. Hicque se numeri superabunt secundum paritatis factam naturaliter connexionem. Primus enim primum duobus superat, ut unum 3, secundus secundum quaternario, ut binarium senarius, tertius tertium sex, ut ternarium novenarius, et ad eundem cæteri modum progressionis augescunt.

Quam rem nobis, scilicet, et ipsa naturalis objecit integritas, nihil nobis extra machinantibus, ut in ipso modulo descriptionis apparet. Si quis autem quarti anguli terminum qui sedecim numeri quantitate notatus est, et longitudinem latitudinemque in quadragenos determinat, velit superioribus comparare, per X litteræ formam proportionem collata, quadrupli mul-

itudinem pernotabit. Hisque est ordinabilis super se A progressio, ut primus primum tribus superet, ut 4 unitatem. Secundus secundum senario vincat, ut octo binarium. Tertius tertium novenario transeat, ut duodenarius ternarium, et sequentes summulae trium se semper adjecta quantitate transiliant. Et si quis subteriores aspiciat angulos, idem per omnes multiplicatae species, usque ad decuplum dispositissima ordinatione perveniet. Si quis vero in hac descriptione, superparticularis species requirat, tali modo reperiet. Si enim secundum angulum notet, cujus est initium quaternarius, eique superjaeet binarius, atque hunc sequentem quis accommodet ordinem, sesquialtera proportio declarabitur. Nam tertius secundi versus, sesquialter est, ut tres ad duo, vel sex ad quatuor, vel 9 ad 6, vel 12 ad 8. Itemque in caeteris qui sunt in eadem serie numeri, si talis conjugatio misceatur, nulla varietatis dissimilitudo surripit. Eadem tamen summarum supergressio est in hoc quoque, quae in duplicibus fuit. Primus enim primum, id est ternarius binarium uno superat, secundus vero secundum, duobus tertium, tertium tribus, et deinceps. Si vero quartus ordo tertio comparetur, ut 4 ad 3, et eodem caeteros ordine consecuteris, sesquitertia comparatio colligitur, ut 4 ad 3, vel 8 ad 6, et 12 ad 9, videsne ut in omnibus his sesquitertia comparatio conservetur? Praeterea eos qui sub ipsis sunt, si idem faciens sequentes versus alterutris comparaveris, omnes sine ullo impedimento species superparticularis agnosces. Hoc autem in hac est dispositione divinum, quod omnes angulares numeri tetragoni sunt. Tetragonus autem dicitur, ut brevissime dicam, quod post latius explicabitur, quem duo aequales numeri multiplicant, ut in hac quoque descriptione est; unus enim semel, unus est, et est potestate tetragonus. Item bis duo 4 sunt. Ter 3 9, quos in semetipsas multiplicationes primi ordinis perfecere. Circum ipsos vero qui sunt, id est circum angulares, longilateri numeri sunt. Longilateros autem voco, quos uno se supergredientes numeri multiplicant. Circum 4 enim 2 sunt et 6, sed duo nascuntur ex uno et duobus, cum unum bis multiplicaveris, sed unitas a binario unitate praeceditur. Sex vero a duobus et tribus, bis enim tres senarium reddunt. Novenarium vero, sex et 12 claudunt, qui 12 ex tribus nascuntur et 4. Ter enim 4 sunt 12. Senarius vero, ex duobus et tribus, bis enim 3 faciunt 6. Qui omnes, uno majoribus lateribus procreati sunt. Nam cum 6 ex binario ternarioque nascuntur, tres binarium numerum uno superant. Cunctique alii ejusdem modi sunt, ut primo et secundo ordine ad alterutrum multiplicatis terminis procreentur, ita ut quod nascitur ex duobus longilateris altrinsecus positus, et bis medio tetragono, tetragonus sit. Et rursus quod ex duobus altrinsecus tetragonus, et uno medio longilatero bis facto nascitur, ipse quoque tetragonus sit. Et ut angulorum totius descriptionis ad angulares tetragonos positorum unius anguli sit prima unitas, alterius vero qui contra est tertia. Bini vero altrin-

secus anguli, secundas habeant unitates, et duo angularium tetragonorum anguli, sequum faciunt quod sub ipsis continetur, illi quod sit ab uno illorum qui est altrinsecus angulorum. Multa enim sunt alia quae in hac descriptione utilia possunt admirabiliaque perpendi, quae interim propter castigatam introducendi breviter ignota esse permittimus. Nunc vero ad sequentia propositum convertamus.

CAPUT XXVIII.

De tertia inaequalitatis specie quae dicitur superpartiens, deque specibus ejus, earumque generationibus.

Igitur post duas primas habitudines multiples et superparticulares, et eas quae sub ipsis sunt submultiplices et subsuperparticulares, tertia inaequalitatis species invenitur, quae a nobis superius superpartiens dicta est. Haec est autem, quae fit cum numerus ad alium comparatus, habet eum totum infra se, et ejus insuper aliquas partes, vel duas, vel 3, vel 4, vel quot ipsa tulerit comparatio. Quae habitudo incipit a duabus partibus tertiis. Nam si duas medietates habuerit, qui illum intra se totum coerces, duplus pro superpartiente componitur. Habebit autem vel duas tertias, vel duas quintas, vel duas septimas, vel duas nonas, et ita progredientibus si duas solas partes minoris numeri superhabuerit, per easdem partes imparibus numeris minorem major summa transcendit. Nam si eum habeat totum et duas ejus quartas, superparticularis necessario reperitur. Nam duae quartae medietas est, et fit sesquialtera comparatio. Si vero duas sextas, rursus est superparticularis. Duae enim sextae, pars tertia est. Quod si in comparatione ponatur, sesquiterciae habitudinis efficiet formam. Post hos nascuntur comites, qui subsuperpartientes vocantur; hi autem sunt qui habentur ab alio numero, et eorum vel duae, vel 3, vel 4, vel quotlibet aliae partes. Si ergo numerus alium intra se numerum habens, ejus duas partes habuerit, superbipartiens nominatur; si vero tres, supertripartiens; quod si 4, superquadrupartiens, atque ita progredientibus in infinitum fingere nomina licet. Ordo autem eorum naturalis est, quoties disponuntur a tribus omnes pares atque impares numeri naturaliter constituti, et sub bis aptantur alii qui sunt a quinario numero incipientes omnes impares. His igitur ita dispositis, si primus primo, secundus secundo, tertius tertio, et caeteri caeteris comparentur, superpartiens habitudo procreatur. Sit enim dispositio hoc modo:

3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	9	11	13	15	17	19

Si igitur quinary numeri ad ternarium comparatio consideretur, erit superpartiens ille qui vocatur superbipartiens. Habet enim quinary totos in se tres, et eorum duas partes, id est 2. Si vero ad secundum ordinem speculatio referatur, supertripartiens proportio cognoscetur, atque in sequentibus per omnes dispositos numeros, omnes in infinitum species hujus numeri convenientes ordinatasque respicies. At vero quemadmodum singuli procreentur, si in ill-

nitum quis euret agnoscere, hic modus est. Habitu enim superbipartientis, si utrisque terminis duplicetur, semper superbipartiens proportio procreatur. Si enim quis duplicet 5, faciet 10; si tres, faciet 6: qui 10 contra senarium comparati, superbipartientem faciunt habitudinem, et hos ipsos rursus si duplicaveris, idem ordo proportionis accrescit. Idemque si in infinitum facies, statum prioris habitudinis non mutabit. Si vero supertripartientes invenire contendas, primos supertripartientes, id est 7 et 4 triplicabis, et huiusmodi nascentur. Si vero qui ex his nati fuerint, ternarii multiplicatione produxeris, idem rursus efficient. Quod si superquadripartientes quemadmodum in infinitum progrediantur optes addiscere, primas eorum radices in quadruplum multiplices licet, id est 9 et 5, et eos qui illa multiplicatione proferentur, rursus in quadruplum, et eandem fieri proportionem inoffensa nimirum ratione reperies. Et ceteræ species una semper plus multiplicatione crescentibus radicibus oriuntur. Radices autem proportionum voco, numeros in superiore dispositione descriptos, quasi quibus omnis summa supradictæ comparationis innititur. In hoc quoque videndum est quoniam, cum duæ partes minore plus in majoribus sunt, tertii semper vocabulum subauditur. Ut superbipartiens qui dicitur, quoniam duas minoris numeri tertias partes habet, dicitur superbipartiens tertias. Et cum dico supertripartiens, subaudiri necesse sit supertripartiens quartas, quoniam tribus superquartis exuberat. Et superquadripartienti, subauditur superquadripartiens quintas, et ad eundem modum in cæteris, uno semper adjecto super habitas partes, subauditio faciendâ est, ut eorum germana convenientiaque his nomina hæc sint, ut qui dicitur superbipartiens, idem dicatur superbitertius. Qui dicitur supertripartiens, is sit supertriquartus, et qui dicitur superquadripartiens, idem dicatur superquadriquintus, eademque similitudine usque in infinitum nomina producantur.

CAPUT XXIX.

De multiplici superparticulari.

Igitur relatæ ad aliquid quantitatis, simplices et primæ species hæc sunt. Duæ vero aliæ, ex his velut ex aliquibus principiis componuntur, ut multiplices superparticulares, et multiplices superpartientes, horumque comites submultiplices superparticulares, et submultiplices superpartientes. Namque in his ut in prædictis proportionibus, minores numeri, et eorum quoque species omnes, addita sub præpositione, dicuntur. Quorum definitio talis reddi potest: multiplex superparticularis est, quotiens numerus ad numerum comparatus, habet eum plus quam semel et ejus unam partem, hoc est, habet eum aut duplum, aut triplum, aut quadruplum, aut quotienslibet, et ejus quamlibet aliquam partem, vel mediam, vel tertiam, vel quartam, vel quæcunque alia partium exuberatione contigerit. Hic ergo et multiplici et superparticulari consistit. Quod enim comparatum

A numerum plus quam semel habet, multiplicis est. Illoc vero quod minorem in habenda parte transcendit, superparticularis. Ita ex utroque nomine factio vocabulo, est, speciesque illius ad illarum, scilicet, sunt imaginem proportionum, ex quibus ipse numerus originem trahit. Nam prima pars hujus vocabuli quæ multiplicis nomine possessa est, multiplicis numeri specierum vocabulo nominanda est. Quæ vero superparticularis est, eodem vocabulo nuncupabitur, quo superparticularis numeri species vocabantur. Dicitur enim qui duplicem habuerit alium numerum, et ejus mediam partem, duplex sesquialter; qui vero tertiam, duplex sesquitercius; qui quartam, duplex sesquiquartus, et deinceps. Si vero ter eum totum contineat et ejus mediam partem, vel tertiam, vel quartam, dicitur triplex sesquialter, triplex sesquitercius, triplex sesquiquartus, et eodem modo in cæteris. Diciturque quadruplus sesquialter, quadruplus sesquitercius, quadruplus sesquiquartus, et quotiens totum numerum in semetipso continuerit, per multiplicis numeri species appellatur, quam vero partem comparati numeri clauserit, secundum superparticularem comparationem habitudinemque vocabitur. Horum autem exempla huiusmodi sunt: duplex sesquialter est, ut quinque ad duo, habent enim 5, binarium numerum bis et ejus mediam, id est 1. Duplex vero sesquitercius est, septenarius ad ternarium comparatus. At vero novenarius ad quaternarium, duplex sesquiquartus. Si vero 11 ad 5, duplex sesquiquintus. Et hi semper nascentur, dispositis in ordinem a binario numero omnibus naturaliter paribus imparibusque terminis, si contra eos omnes a quinario numero impares comparentur, ut primum primo, secundum secundo, tertium tertio, caute et diligenter apponas, ut sit dispositio talis:

2	5	4	5	6	7	8	9	10	11
5	7	9	11	13	15	17	19	21	25

Si vero a duobus paribus omnibus dispositis terminis, illi qui a quinario numero inchoantes, quinario numero rursus sese transiliunt comparentur, omnes duplices sesquialteros creant, ut est subjecta descriptio.

2	4	6	8	10	12
5	10	15	20	25	30

D Si vero a tribus inchoent dispositiones, et tribus sese transiliunt, et ad eos aptentur qui a septenario inchoantes, septenario sese numero transgrediuntur, omnes duplices sesquitercii, habita diligenter comparatione, nascuntur, ut subjecta descriptio monet.

3	6	9	12	15	18	21
7	11	21	28	35	42	49

Si vero omnes in ordinem quadrupli disponantur, hi qui naturalis numeri quadrupli sunt, ut unitatis quadruplus, et duorum, triumque et quatuor, atque quinarum, et cæterorum sese sequentium, ut ad eos aptentur a novenario numero inchoantes, semper sese novenario præcedentes, tunc duplicis sesquiquartæ proportionis forma textetur.

	4	8	12	16	20	24
	9	18	27	36	45	54

Ea vero species hujus numeri, quæ est triplex sesquialtera, hoc modo procreatur; si disponantur a binario numero omnes in ordinem pares, et ad eos septenario numero inchoantes, septenario sese supergredientes, solito ad alterutrum modo comparationis aptentur.

	2	4	6	8
	7	14	21	28

Si autem a ternario numero ingressi, cunctos naturalis numeri triplices disponamus, et eis a denario numero denario sese supergredientes ordine comparemus, omnes triplices sesquitercii in ea terminorum continuatione provenient.

	3	6	9	12
	10	20	30	40

CAPUT XXX.

De eorum exemplis in superiore formula inveniendis.

Horum autem eorumque qui sequuntur exempla integre planeque possumus pernotare, si in priorem descriptionem, quam fecimus cum de superparticulari et multiplici loqueremur, ubi ab uno usque in denarium multiplicationum summa concrevit, diligenter velimus acumen intendere. Ad primum enim versus omnes qui sequuntur collati, ordinatas convenientesque multiplicis species reddent. Si vero ad secundum cunctos qui tertii sunt ordinis aptaveris, ordinatas species superparticularis agnosces. Quod si tertio ordini, quicumque sunt in quinto versus compares, superpartientis numeri species positas convenienter aspicias. Multiplex vero superparticularis ostenditur, cum ad secundum versus omnes qui sunt quinti versus serie comparantur, vel qui sunt in septimo, vel qui sunt in nono, atque ita si in infinitum sit ista descriptio, in infinitum hujus proportionis species procreabuntur. Manifestum autem etiam hoc est, quod horum comites semper cum sub præpositione dicentur, ut est subduplex sesquialter, subduplex sesquitercius, subduplex sesquiquartus, et cæteri quidem ad hunc modum.

CAPUT XXXI.

De multiplici superpartiente.

Multiplex vero superpartiens est, quoties numerus ad numerum comparatus habet in se alium numerum totum plus quam semel, et ejus vel duas, vel 3, vel quotlibet plures particulas, secundum numeri superpartientis figuram. In hoc quoque propter causam superius dictam, non erunt duæ medietates, neque duæ quartæ, neque duæ sextæ, sed duæ tertiæ, vel duæ quintæ, vel duæ septimæ, ad priorem similem consequentiam. Non est autem difficile secundum priorum exempla positorum, hos quoque et præter nostra exempla numeros invenire. Vocabunturque hi, secundum proprias partes, duplex superbipartiens, vel duplex supertripartiens, vel duplex superquadrupartiens. Et rursus triplex superbipar-

tiens, et triplex supertripartiens, et triplex superquadrupartiens, et similiter. Ut 8 ad 3 comparati faciunt duplicem superbipartientem, et 16 ad 6, et omnes quicumque ab 8 incipientes, octonario sese numero transgrediuntur, comparati ad eos qui a tribus inchoantes, ternarii sese quantitate prætereunt. Nec est difficile alias ejus partes secundum prædictum modum diligentibus reperire. Hic quoque illud meminisse debemus quod minores et comites non sine sub præpositione nominantur, ut sit subduplex superbipartiens, subduplex supertripartiens.

CAPUT XXXII.

Demonstratio quemadmodum omnis inæqualitas ab æqualitate processerit.

Restat autem nobis profundissimam quamdam tradere disciplinam, quæ ad omnem naturæ vim rerumque integritatem maxima ratione pertinet. Magnus quippe in hac scientia fructus est, si quis non nesciat quod bonitas definita est et sub scientiam eadens, animo, ut semper imitabilis et perceptibilis prima natura est, et sæ substantiæ decore perpetua. Infinitum vero malitiæ dedecus est, nullis propriis principiis nixum, sed natura semper errans a boni definitione principii, tanquam aliquo signo optimæ figuræ impressa componitur, et ex illo erroris fluctu retinetur. Nam nimiam cupiditatem iræque immodicam effrenationem, quasi quidam rector animus, pura intelligentia roboratus, astringit, et has quodammodo inæqualitatis formas, temperata bonitate constituit. Hoc autem erit perspicuum, si intelligamus omnes inæqualitatis species, ab æqualitatis crevisse primordiis, ut ipsa quodammodo æquitas, matris et radicis obtinens vim, ipsa omnes inæqualitatis species ordinesque profundat. Sint enim nobis tres æquales termini, id est tres unitates, vel tres bini, vel tres terni, vel tres quaterni, vel quantos ultra libet ponere. Quod enim in unis tribus terminis evenit, idem contingit in cæteris. Ex his igitur, secundum præcepti nostri ordinem, videas primum nasci multiplices, et in his duplices prius dehinc triplos, deinde quadruplos, et ad eundem ordinem consequentes. Rursus, multiplices si convertantur, ex his superparticulares orientur, et ex duplicibus quidem, sesquialteri, ex triplicibus sesquitercii, ex quadruplis sesquiquarti, et cæteri in hunc modum. Ex superparticularibus vero conversis, superpartientes nasci necesse est, ita ut ex sesquialtero nascatur superbipartiens, supertripartientem sesquitercius gignat, et ex sesquiquarto superquadrupartiens. Rectis autem positis, neque conversis prioribus superparticularibus, multiplices superparticulares oriuntur. Rectis vero superpartientibus, multiplices superpartientes efficiuntur. Præcepta autem tria hæc sunt, ut primum numerum primo facias parem, secundum vero primo et secundo, tertium primo, duobus secundis et tertio. Hoc igitur cum in terminis æqualibus feceris, ex his qui nascentur duplices erunt. De quibus duplicibus si idem feceris, triplices procreantur, et de his quadruplices, atque in infinitum om-

nes formas numeri multiplices explicabit. Jaceant igitur 3 termini æquales.

1	1	1
---	---	---

Ponatur itaque primo primus æqualis, id est unus. Secundus vero, primo et secundo, id est 2; tertius vero primo, duobus secundis et tertio par sit, id est uni et duobus unis et uni, qui sunt 4, ut est descriptio :

1	1	1
1	2	4

Videsne ut duplici proportione sequens ordo texatur. Fac rursus idem de duplicibus, ut sit primus primo æqualis, id est uni; secundus primo et secundo, id est uni et duobus, qui sunt 3; tertius primo, id est uni, duobus secundis, id est 4, et tertio, id est quatuor, qui simul 9 fiunt, et venit hæc forma :

1	1	1
1	2	4
1	3	9

Rursus, si de triplicibus idem feceris, continuus quadruplus procreabitur. Sit enim primus primo æquus, id est unus; sit secundus primo et secundo æqualis, id est 4; sit tertius primo, duobus secundis et tertio æqualis, id est 16.

1	1	1
1	2	4
1	3	9
1	4	16

Et in cæteris quidem ad hanc formam, tribus his præceptis utemur. Si vero qui ex æqualibus nati sunt multiplices, eos disponamus, et secundum hæc præcepta vertamus, ita ut converso sint ordine, sesquialter ex duplici procreabitur, sesquitercius ex triplici, sesquiquartus ex quadruplo. Sint enim 3 duplices termini, qui ex æqualibus creati sunt, et qui ultimus est, primus ponatur hujusmodi :

4	2	1
---	---	---

Et constituatur primo in hoc ordine, primus par, id est 4, secundus vero primo et secundo par, id est 6, tertius vero primo, duobus secundis et tertio, id est 9.

4	2	1
4	6	9

Ecce tibi illa sesquialtera quantitas ex termino duplicitalis exoritur. Videamus nunc ad eundem modum ex triplici qui nascatur; disponantur enim triplices superiores, converso scilicet ordine sicut duplex, licet est quoque ordo dispositus :

9	3	1
---	---	---

Ponatur ergo primus primo æquus, id est 9; secundus primo et secundo, id est 12; tertius primo, duobus secundis et tertio æquus, id est 16.

9	3	1
9	12	16

Rursus secunda species superparticularis numeri, id est sesquitercius procreatus est. Quod si idem de quadruplo quis facere velit, sesquiquartus continuo nascetur, ut monstrabit subjecta descriptio :

16	4	1
16	20	25

Ac si quis idem de cunctis in infinitum partibus multiplicatis faciat, convenienter ordinem superparticularitatis inveniet. Quod si conversos superparticulares aliquis secundum hæc præcepta convertat, continuo videat superpartientes acrescere, et ex sesquialtero quidem superbipartientis, ex sesquitercio supertripartientis procreatur, et cæteri secundum communes denominationis species, sine ulla ordinis interpolatione nascentur. Disponantur igitur sic :

9	6	4
---	---	---

Superioris igitur descriptionis, primo primus æquus numerus ascribatur, id est 9, secundus vero primo et secundo, id est 15, tertius vero primo, duobus secundis et tertio, id est 25.

9	6	4
9	15	25

Si ergo sesquitercium eodem modo vertamus, ordo supertripartientis invenitur. Sit enim prima propositio sesquitercii.

16	12	9
----	----	---

Ponatur secundum priorem modum, primo par primus, id est 16; secundus primo et secundo, id est 28; tertius primo, duobus secundis et tertio, id est 49. Omnis ergo summa disposita supertripartientes efficiet.

16	12	9
16	28	49

Rursus si sesquiquartum eodem modo verteris, superquadripartiens statim quantitas procreabitur, ut est ea forma quam suppositam vides.

25	20	16
25	45	18

Restat quemadmodum ex superparticularibus et superpartientibus multiplices superparticulares et multiplices superpartientes nascentur, ostendere. Quorum binas tantum faciam descriptiones, namque si rectam et non conversam sesquialterum ponimus, duplex superparticularis excrescit; sit enim hoc modo :

4	6	9
---	---	---

Ponatur secundum superiorem modum primo, primus æqualis, id est 4; secundus primo et secundo, id est 10; tertius primo, duobus secundis et tertio æqualis, id est 25.

4	6	9
4	10	25

Atque hæc quidem duplex sesquialtera summa producta est. Si vero sesquitercium non conversum ponamus, duplus sesquitercius invenitur, ut subjecta descriptio docet.

9	12	16	
9	21	49	

At vero si ad superpartientes animum convertamus, eosque ordinatim secundum superiora præcepta disponamus, multiplices superpartientes ordinatim progenitos reperiemus. Disponatur enim superpartientis hæc formula :

9	15	25	
---	----	----	--

Ascribatur ergo primus, primo æquus, id est 9; secundus primo et secundo, id est 24; tertius primo, duobus secundis et tertio, id est 64.

9	15	25	
9	24	64	

A Videsne ut ex superbipartiente duplus superbipartiens exortus sit. At vero si supertripartientem ponam, duplex sine dubio tripartiens invenitur, ut in subjecta descriptione perspicuum est :

16	28	49	
16	44	121	

Sic ergo de superparticularibus vel de superpartientibus multiplices superparticulares vel multiplices superpartientes oriuntur. Quare constat omnium inæqualitatum æqualitatem esse principium, ex eadem enim inæqualia cuncta nascuntur. Ac de his quidem hactenus d'asserendum esse credidimus, ne vel infinita sectemur, vel circa res obscurissimas ingredientium animos detinentes, ab utilioribus moraremur.

LIBER SECUNDUS.

CAPUT PRIMUM.

Quemadmodum ad æqualitatem omnis inæqualitas reducatur.

Superioris libri disputatione digestum est quemadmodum tota inæqualitatis substantia a principe sui generis æqualitate processerit. Sed quæ rerum elementa sunt, ex eisdem principaliter omnia componuntur, et in eadem rursus resolutione facta resolvuntur. Ut quoniam articularis vocis elementa sunt litteræ, ab eis est syllabarum progressa conjunctio, et in easdem rursus terminatur extremas, eandemque vim obtinet sonus in musicis. Jam vero mundum & corpora non ignoramus efficere. Namque (ut ait) ex imbrī terraque omnia gignuntur et igni; sed in hæc rursus ejus 4 elementa fit postrema resolutio. Ita igitur, quoniam ex æqualitatis margine cunctas inæqualitatis species proficisci videmus, omnis a nobis inæqualitas ad æqualitatem rursus, velut ad quoddam elementum proprii generis resolvatur. Hoc autem trina rursus imperatione colligitur, eaque resolvendi ars. Datis quibuslibet tribus terminis, inæqualibus quidem, sed proportionaliter constitutis, id est, ut eandem medius ad primum vim proportionis obtineat, quam qui est extremus ad medium in qualibet inæqualitatis ratione, vel in multiplicibus, vel in superparticularibus, vel in superpartientibus, vel in iis quæ ex his procreantur, hoc est multiplicibus superparticularibus, vel multiplicibus superpartientibus, eadem atque una ratione indubitata constabit. Propositis enim tribus (ut dictum est) terminis, æquis proportionibus ordinatis, ultimum semper medio detrahimus, et ipsum quidem ultimum, primum terminum collocemus, quod de medio relinquatur, secundum. De tertia vero propositorum terminorum summa auferemus unum primum, et duos secundos eos qui de medietate relictī sunt, et id quod ex tertia summa relinquatur, tertium terminum constituemus. Videbis igitur hoc facto, in maiorem modum summas reverti, et ad principaliorem habitudinem compara-

B tionea proportionemque reduci, ut si sit quadrupla proportio, primo ad triplam, inde ad duplam, inde ad æqualitatem usque remeare. Et si sit superparticularis sesquiquartus, primo ad sesquitercium, inde ad sesquialterum, postremo ad tres æquales terminos redire. Hoc autem nos exempli gratia in multiplici tantum proportionem docebimus. Solertem vero, in aliis quoque inæqualitatis speciebus id experientem, eadem ratio præceptorum juvabit. Constituantur enim tres ad se termini quadrupli:

8	32	128	
---	----	-----	--

Aufer igitur ex medio minorem, id est ex triginta duobus, octonarium, relinquuntur 24, et primum octonarium terminum pones, secundum vero, quod reliquum fuerit ex medio, id est 24, ut sint hi duo termini, 8 et 24. De tertio vero, id est 128, aufer unum primum, id est 8, et duos secundos qui sunt reliqui, id est bis 24, et relinquuntur 72. His dispositis terminis, ex quaduplis propinquior æquitati proportio, tripla redacta est. Sunt enim termini :

8	24	72	
---	----	----	--

Ex his autem ipsis idem si feceris, ad duplum rursus comparatio remeabit. Pone enim primum minori æquum, id est 8, et ex secundo aufer primum, 16 relinquuntur. Sed ex tertio, id est ex 72, aufer primum, id est 8, et duos secundos, id est bis 16, et erit reliqua pars 32. Quibus positis, ad duplas proportionem habitudo redigitur.

8	16	32	
---	----	----	--

Idem vero ex his si fiat, rem omnem ad æqualitatis summas eliquabimus. Pone enim primum minori æquum, id est 8, et aufer ex 16 octonarium, remanent 8, quibus dispositis, ex tertio, id est 32, sumptis primo, id est 8, et duobus secundis, id est duobus octonariis, supersunt 8. Quibus dispositis, prima nobis æqualitas cadit, ut subjectæ summulæ docent.

8	8	8	
---	---	---	--

Hinc igitur si quis ad alias inæqualitatis species animus tendat, eandem convenientiam intubanter inveniet. Quare pronuntiandum est, nec ulla trepidatione dubitandum, quod quemadmodum per se constantis quantitatis unitas principium et elementum est, ita et ad aliquid relatæ quantitatis æqualitas mater est. Demonstravimus enim quod hinc et ejus procreatio prima foret, et in eam rursus postrema solutio est.

CAPUT II.

De inveniendis in unoquoque numero quot numeros ejusdem proportionis possit præcedere, eorumque descriptio, descriptionisque expositio.

Est autem quædam in hac re profunda et miranda speculatio, et (ut ait Nicomachus) *ἑνωσιγενῶν θεώρημα* perficiens, et ad Platonicam in Timæo animæ generationem, et ad intervalla harmonicæ disciplinæ. Ibi enim jubemur perducere atque extendere tres vel quatuor sesquialteros, vel quotlibet sesquitercias proportionum, et sesquiquartas comparationes, eas quæ secundum propositum ordinem, sæpe continuas jubemur extendere. Ne autem hoc, labore quodam semper quidem maximo, frequentius inferaci fiat, hæc nobis ratione, in quot numeris quanti possint esse superparticulares, investigandum est. Omnes enim multiplices, tantarum similium sibi met proportionum principes erunt, quot ipsi loco ab unitate discesserunt. Quod autem dico, sibi met similium tale est, ut dupli semper multiplicitas (ut superius dictum est) sesquialteros creet, et triplex sit dux sesquiteriorum, quadruplus sesquiquartis. Primus ergo duplex unum solum habebit sesquialterum, secundus duos, tertius tres, quartus quatuor, et secundum hunc ordinem eadem sit in infinitum progressio. Neque unquam fieri potest ut vel superet proportionum numerum, vel ab eo sit diminutio æquabilis ab unitate locatio. Primus ergo duplex est binarius numerus, qui unum solum sesquialterum recipit, id est ternarium. Binarius enim contra ternarium comparatus sesquialteram efficit proportionem. Ternarius vero, quoniam medietatem non recipit, non est alter numerus ad quem in ratione sesquialtera comparetur. Quaternarius vero numerus, secundus duplex est, hic ergo duos sesquialteros præcedit. Est enim ad ipsum quidem comparatus senarius numerus, ad senarium vero, quoniam medietatem habet novenarius, et sunt duo sesquialteri, ad 4 scilicet 6, ad sex vero 9. Novenarius vero, quoniam medietate caret, ab hac comparatione seclusus est. Tertius vero duplex est 8, hic ergo 3 sesquialteros antecedit. Comparatur enim ad ipsum duodenarius numerus, ad duodenarium 18, ad 18 rursus 27. At vero 27 medio carent. Idem quoque in sequentibus evenire necesse est quod nos cum propria ordinatione subdidimus. Semper enim hoc, divina quadam nec humana constitutione, speculationibus occurrit, ut quotienscunque ultimus numerus invenitur, qui loco duplicis ab unitate sit par, talis sit ut in medietates dividi secarique non possit.

Latitudo.

1	2	4	8	16	32
	3	6	12	24	48
	Δη	9	18	36	72
		μυ	27	54	105
			1α	81	143
				ris	145

Idem contingit etiam in triplicibus, ex illis enim sesquiterciis procreantur. Nam quoniam primus triplex est ternarius numerus, habet unum sesquitercium, id est 4. Cujus quaternarii tertia pars non potest inveniri, atque ideo hic epiritio caret. Secundus vero, qui est novem, habet ad se duodenarium numerum sesquitercium. Duodenarius autem, quoniam habet tertiam partem, in sesquitercia proportionem comparatur ad eum numerus sedecim, qui tertiæ partis sectione solutus est. Viginti septem autem, quoniam tertius est triplex, habet ad se sesquitercium triginta sex, et hic rursus ad quadraginta octo eadem proportionem comparatur. Cui si sexaginta quatuor appositus fuerint, eandem rursus vim proportionis explebunt. Quos sexaginta quatuor ad nullum sesquitercium rursus aptabis, quoniam parte tertia non tenentur. Atque hoc in cunctis triplicibus invenitur, ut extremus ejusdem proportionis numerus, tantos ante se præcedentes habeat, quanto primus eorum ab unitate discesserit. Et qui tot super se ejusdem proportionis habuerit numeros, quotus ab unitate primus eorum jacet, ejus pars quæ illi comparatus numerus, possit eandem facere proportionem, inveniri nequeat. Et triplicis quidem hæc est descriptio:

Latitudo.

1	3	9	27	81	243
	4	12	36	108	324
	Δη	16	48	144	432
		μυ	64	192	576
			1α	236	768
				ris	1024

At quadrupli secundum hanc formam descriptio est, ad quam scilicet, qui a prioribus instructus accesserit, nulla ratione trepidabit, et de cæteris quidem multiplicibus, eandem convenientiam pernotabit.

Latitudo.

1	4	16	64	256	1024
	5	20	80	320	1080
	Δη	25	100	400	1600
		μυ	125	500	2000
			1α	625	2500
				rs	3125

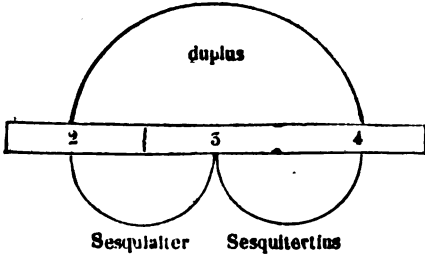
Hinc quoque perspicuum est, superparticularium (quemadmodum prius ostensum est) primos esse multiplices. Si quidem duplices sesquialteros, triplices sesquitercios, et cuncti multiplices cunctos in ordinem superparticulares creant. Est etiam in his hoc quoque mirabile. Namque ubi prima latitudo fuerit duplex, et sub eisdem qui sunt versus contianci alternatiim positi, secundum seriem latitudinis duplices erunt. Si vero fuerint triplices et inferiores ordines,

tripla se in suis terminis multiplicatione superabunt. A
 At in quadrupla, quadrupli, atque hoc infinita ductum
 speculatione non fallit. Angulares autem omnium
 multiplices evanire necesse est. Erunt autem dupli-
 cium quidem triplices, triplicium quadruplices,
 quadruplorum vero quincupli, et secundum eandem
 ordinis incommutabilem rationem, sibimet cuncta
 consentient, quibus expositis, ad sequentem operis
 seriem competens disputatio convertatur.

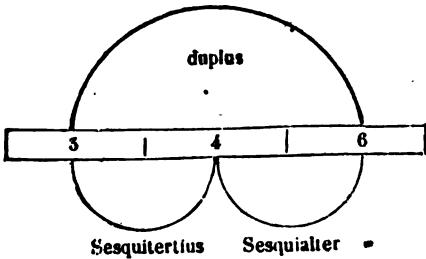
CAPUT III.

Quod multiplex intervallum ex quibus superparticula-
 ribus medietate posita, intervallis fiat, ejusque inve-
 niendi regula.

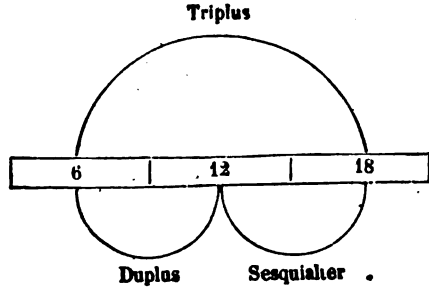
Si igitur duæ primæ superparticulares species con-
 jungantur, prima species multiplicatis exoritur. B
 Omnis autem duplex ex sesquialtero sesquitertioque
 componitur, et omnis sesquialter et sesquitercius
 duplicem jungunt. Nam ternarius, sesquialter est
 duorum, quatuor vero, sesquitercius ternarii, sed
 4 duplus duorum.



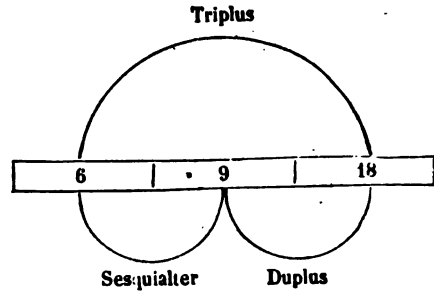
Sic igitur sesquialter et sesquitercius unum duplicem
 component. At vero si fuerint medietas et duplus,
 inter duplicem et medium potest una medietas talis
 inveniri, quæ ad alteram extremitatem sesquialtera
 sit, ad alteram sesquitercia. Atrinsecus enim positus
 senario et ternario, id est duplici et medietate, si
 quaternarius in medio collocetur, ad ternarium nu-
 merum sesquiterciam continet rationem, ad senarium
 vero sesquialteram.



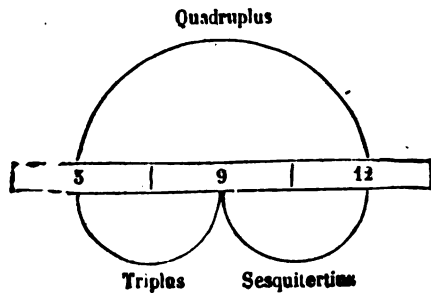
Recte igitur dictum est, et duplicem a sesquialtero
 sesquitertioque conjungi, et has duas superparticu-
 laribus species duplicem procreare, id est primam
 speciem multiplicis quantitatis. Rursus ex prima mul-
 tiplicis specie, id est ex duplici, et prima superparticu-
 lari, id est sesquialtera, continens multiplicis species,
 id est tripla conjungitur. Namque 12 senarii numeri
 duplus est, decem vero et octo, ad duodenarium
 sesquialter, qui ad senarium numerum triplus est.



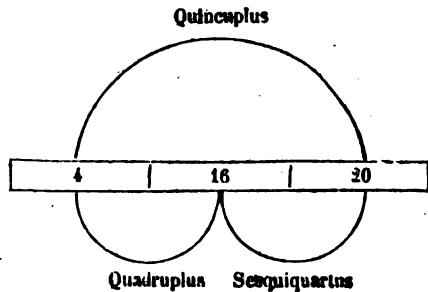
Et positus eisdem, 6 et 18, novenarius in medietate
 ponatur, erit ad senarium sesquialter, qui ad 18.
 Subduplus est, et ad senarium 18 triplus est.



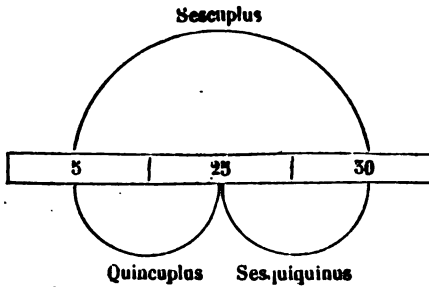
Ex duplici igitur et sesquialtero, triplex ratio pro-
 portionis exoritur, et in eas rursus resolutione facta
 revocatur. Si autem hic, id est triplus numerus, qui
 est species secunda multiplicis, secundæ speciei
 superparticularis aptetur, quadrupli continuo forma
 contextitur, et in easdem rursus partes naturali par-
 titione solvetur, secundum modum quem superius
 demonstravimus. C



Si vero quadruplus sese ac sesquialter us agglome-
 rent, quincuplus coninuo fiet : D



Et si quincuplus cum sesquiquinto, mox sescupli
 proportio conjugabitur.



Atque ita secundum hanc progressionem cunctæ multiplici-
tatis species sine ulla rati ordinis permuta-
tione nascentur. Ita vero ut duplus eum sesquial-
tero triplicem creet, et triplus eum sesquiter-
tio, quadruplum, quadruplus eum sesquiquarto, quincup-
lum, et cæteri eodem modo, ut nullus hanc conti-
nuationem finis impediat.

CAPUT IV.

*De p. r. se constante quantitate, quæ in figuris geome-
tricis consideratur; communis ratio omnium magni-
tudinum.*

Hæc quidem de quantitate quam secundum ad ali-
quid speculamur, ad præsens dicta sufficiant. Nunc
autem in hac sequentia, quædam de ea quantitate
quæ per seipsam constat, neque ad aliquid refer-
tur, expediã, quæ nobis ad ea prodesse possant,
quæ post hæc rursus de relata ad aliquid quantitate
tractabimus. Amat enim quodammodo mathe-
zæos speculatio alterna probationum ratione consti-
tuit. Nunc autem nobis de his numeris sermo futu-
rus est, qui circa figuras geometricas et earum spatia
dimensionesque versantur, id est de linearibus nu-
meris, et de triangularibus vel quadratis, cæterisque
quos sola pandit plana dimensio, nec non de inæ-
quali laterum compositione conjunctis. De solidis
etiam, id est cubis et sphericis vel pyramidis, later-
culis etiam, vel tigulis et cunctis, quæ omnia quidem
geometricæ propriæ considerationis sunt. Sed sicut
ipsa geometricæ scientia ab arithmetica velut qua-
dam radice ac matre producta est, ita etiam ejus
figurarum semina in primis numeris invenimus. Pla-
num siquidem fecimus quod omnes disciplinas hæc
interempta consumeret, quas minime constituta in-
firmaret. Hoc autem cognoscendum est quod hæc
signa numerorum posita quæ nunc quoque homines
in summarum designatione describunt, non naturali
institutione formata sunt; ut enim quinarium subjectam
notulam signant de v, vel denarii, quam descripsimus
de x, et alias hujusmodi, non natura posuit, sed
usus affinxit. Quinque enim vel decem, vel quotlibet
alios illis notulis pro compendio notare voluerunt,
ne quotiens unitates quis monstrare vellet, totiens ei
virgulæ ducerentur. Nos autem quotienscunque ali-
quid monstrare volumus, in his præsertim formulis,
ordinarum virgularum multitudinem non gravamur
æponere. Cum enim quinque volumus demonstrare,
facimus quinque virgulas, quæcimusque eas hoc modo,
1 1 1 1 1, et cum 7 totidem, et cum 10 nihilominus,
quia naturalius est quemlibet numerum quantas in

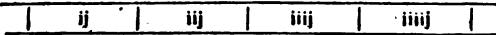
A se retinet, tot unitatibus designare quam notulis. Est
igitur unitas vicem obtinens puncti, intervalli, lon-
gitudinisque principium, ipsa vero nec intervalli,
nec longitudinis capax, quemadmodum punctum
principium quidem lineæ est atque intervalli, ipsum
vero nec intervallum nec linea. Neque enim pun-
ctum puncto superpositum ullum efficit intervallum,
velut si nihil nulli jungas. Nihil enim est quod ex
nullorum procreatione nascatur. Eadem quippe
etiam circa æqualitates proportio manet. Nam si
quotlibet fuerint termini pares, tantum quidem est
a primo ad secundum, quantum a secundo ad ter-
tium. Sed inter primum et secundum, vel secundum
et tertium, nulla est intervalli longitudo vel spatium.
Si enim tres senarios ponas hoc modo 6, 6, 6, quem-
admodum primus est ad secundum, sic est secundus
ad tertium. Sed inter primum et secundum nihil in-
terest, 6 enim et 6 nulla spatii intervalla disjungunt.
Ita etiam unitas in seipsa multiplicata nihil procreat.
Semel enim in unum nihil aliud ex se gignit quam
ipsa est. Nam quod intervallo caret, etiam vim gignendi
intervalla non recipit, quod in aliis numeris
non videtur eventire. Omnis enim numerus in seipsum
multiplicatus alium quemdam efficit majorem quam
ipse est, idcirco quoniam intervalla multiplicata ma-
jore sese spatii prolixitate distendunt. Id vero quod
sine intervallo est, plus quam ipsa est, pariendi non
habet potestatem. Ex hoc igitur principio, id est
ex unitate prima omnium longitudo succrescit, quæ
a binarii numeri principio in cunctos sese numeros
explicat, quoniam primum intervallum linea est,
duo vero intervalla sunt longitudo et latitudo, id est
linea et superficies. Tria ergo intervalla sunt, lon-
gitudo, latitudo, altitudo, id est linea, superficies
atque soliditas. Præter hæc autem alia intervalla
inveniri non possunt. Aut enim unum intervallum
erit quod longitudo est, aut aliquid quod duobus in-
tervallis expositum est, ut si qua res longitudinem
habeat et latitudinem, vel trina intervalli dimen-
sione porrigitur, si longitudine, altitudine, latitudi-
neque censetur, supraque adeo nihil inveniri po-
test, ut ipsorum sex motuum formæ ad intervalla-
lorum naturas et numerum componantur. Unum
enim intervallum duos in se continet motus, ut in
tribus intervallis sex sese motuum summa conficiat
hoc modo. Est enim in longitudine ante et retro,
in latitudine sinistra et dextra, in altitudine sursum
ac deorsum. Necessè est autem ut quidquid fuerit
solidum corpus, hoc habeat longitudinem, latitudi-
nemque et altitudinem, et quidquid hæc tria in se
continet, illud suo nomine solidum vocetur. Hæc
enim tria circa omne corpus inseparabili conjunctione
versantur, et in natura corporum constituta sunt.
Quare quidquid uno intervallo caret, illud corpus
solidum non est. Nam quod duo sola intervalla re-
tinet, illud superficies appellatur. Omnis enim super-
ficies sola longitudine et latitudine continetur, et
hic eadem illa conversio remanet. Omne enim quod
superficies est, longitudinem et latitudinem retinet,

et quod hæc retinet, illud est superficies. Hæc autem superficies uno tantum intervallo solidi corporis dimensione superatur, quæ uno rursus intervallo lineam vincit, quæ longitudinis naturam retinens, latitudinis expers est. Quæ linea eo quod unius est intervalli sortita naturam, a superficie uno intervallo, a soliditate duobus spatiis vincitur. Punctum igitur alio rursus intervallo a linea vincitur, ipsa scilicet quæ reliqua est longitudine. Quare si punctum uno quidem intervallo a linea supergreditur, idem a superficie vincitur duobus, tribus vero intervalli dimensionibus a soliditate relinquitur, constat punctum ipsum sine ulla corporis magnitudine vel intervalli dimensione, cum et longitudinis et latitudinis et profunditatis expers sit, omnium intervallorum esse principium, et natura insecabile, quod Græci atomon B vocant, id est ita diminutum atque parvissimum, ut ejus pars inveniri non possit. Est igitur punctum primi intervalli principium, non tamen intervallum, et lineæ caput, sed nondum linea. Sicut linea quoque superficies principium est, sed ipsa superficies non est, et secundi intervalli caput est, secundum tamen intervallum ipsa non retinet. Idem quoque et in superficie rationem cadit, quæ et ipsa solidi corporis et triplicis intervalli naturale sortitur initium, ipsa vero nec trina intervalli dimensione distenditur, nec alla crassitudine solidatur.

CAPUT V.

De numero lineari.

Sic etiam in numero unitas quidem cum ipsa linearis numerus non sit, in longitudinem tamen distenti numeri principium est. Et linearis numerus cum ipse totius latitudinis expers sit, in aliud tamen spatium latitudinis extenti numeri sortitur initium. Superficies quoque numerorum cum ipsa solidum corpus non sit, addita tamen altitudini solidi corporis caput est. Hoc autem planius his exemplis liquebit. Linearis numerus est a duobus inchoans, adjecta semper unitate in unum eundemque ductum quantitatis explicata congeries, ut est id quod subjicimus.

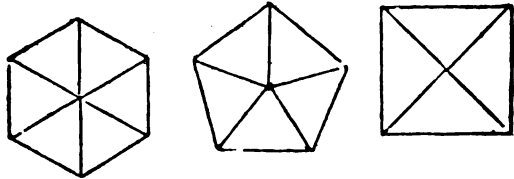


CAPUT VI.

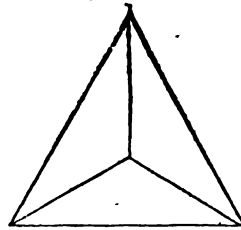
De planis rectilineis figuris, quodque earum principium sit triangulus.

Plana vero superficies in numeris invenitur, quotiens a tribus inchoatione facta addita descriptionis latitudinæ, in sequentium se naturalium numerorum multitudine anguli dilatantur, ut sit primus triangulus numerus, secundus quadratus, tertius qui sub quinque angulis continetur, quem pentagonum Græci nominant; quartus hexagonus, id est qui sex angulis includitur; quintus heptagonus, sextus octogonus, id est qui 7 vel 8 angulorum terminis dilatantur, et cæteri eodem modo singillatim per naturalem numerum angulos augeant, in plana scilicet descriptione figurarum. Hi vero idcirco a ternario numero inchoant, quod latitudinis et superficies solus ternarius principium est. In geometrica quoque idem planius invenitur. Duæ enim lineæ rectæ spatium non

A continent, et omnis triangularis figura, vel tetragoni, vel pentagoni, vel hexagoni, vel cujuslibet qui pluribus angulis continetur, si a medietate per singulos angulos lineæ producantur, tot eum dividunt trianguli, quot ipsam figuram angulos habere contigerit. Quadratum enim ita ductæ lineæ in 4, pentagonum in 5, hexagonum in 6, heptagonum in 7, et cæteros in suorum angulorum modo mensuraque per triangulos partiantur, ut est subjecta descriptio.



At vero triangula figura cum eam quis ita dividerit, in alias figuras non resolvitur nisi in seipsam, in tria enim triangula dissipatur.

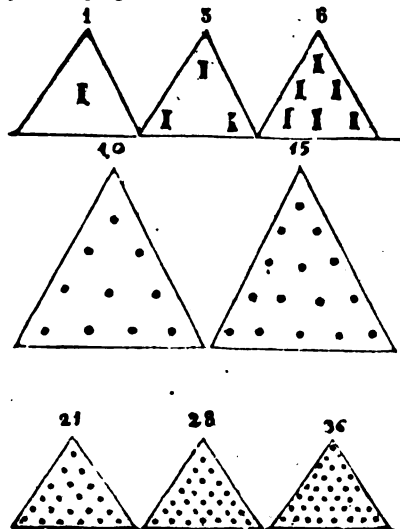


Adeo hæc figura princeps est latitudinis, ut cætera omnes superficies in hanc resolvantur, ipsa vero quoniam nullis est principiis obnoxia, neque ab alia latitudine sumpsit initium, in sese ipsa resolvatur. Idem autem et in numeris fieri sequens operis ordo monstrabit.

CAPUT VII.

Dispositio triangulorum numerorum.

Est igitur primus triangulus numerus qui solis tribus unitatibus dissipatur, secundum superficies positionem, triangula scilicet descriptione, et post hunc quicumque æqualitatem laterum, in trina laterum spatia segregant.



CAPUT VIII.

De lateribus triangulorum numerorum.

Ad hunc modum infinita progressio est, omnesque ordine trianguli æquilateri procreabuntur, et primum omnium ponent, id quod ex unitate nascitur, ut hæc vi sua triangulus sit, non inde etiam opere atque actu. Nam si cunctorum est mater numerorum, quidquid in iis qui ab ea nascuntur numeris invenitur, necesse est ut ipsa naturali quadam potestate contineat, et hujus trianguli latus est unitas. Ternarius vero qui primus est opere et actu ipso triangulus, crescente unitate binarium numerum latus habebit. Vi enim et potestate primi anguli, id est unitatis, unitas latus est, actu vero et opere trianguli primi, id est ternarii dualitas, quam Græci dyada vocant. Secundi vero trianguli qui opere atque actu secundus est, id est senarii, crescente naturali numero in lateribus ternarius invenitur. Tertius vero, id est denarii, quaternarius latus continet, et quati vero, id est 15, quaternarius latus tenet, et quinti senarius. Idemque usque in infinitum.

CAPUT IX.

De generatione triangulorum numerorum.

Nascuntur autem trianguli disposita naturali quantitate numerorum, si prioribus semper multitudo sequentiam congregetur. Disponatur enim naturalis numerus hoc modo :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

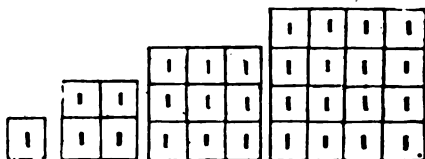
Ex his igitur si primum numerum sumam, id est unitatem, habeo primum triangulum, qui est vi et potestate, nondum etiam actu nec opere. Huic si secundum aggregavero, qui in naturali numerorum dispositione descriptus est, id est binarium, primus mihi triangulus opere et actu nascitur, id est ternarius. Si vero huic tertium ex naturali numero adjecero, secundus mihi opere et actu triangulus procreatur. Super unum enim et duo si tertium, id est ternarium, aggregavero, senarius extendi ur, secundus scilicet triangulus. Huic vero si consequentem quaternarium superposuero, denarius explicatur, qui est tertius actu triangulus, quos per latera disponens, ad superioris descriptionis exemplar, cunctos triangulos numeros sine ullius dubitationis erroribus pernotabis, et quantas ultimus numerus in se unitates habet, quem superioribus aggregabis, tot ipse qui sit triangulus unitates habebit in latere. Nam ternarium, qui est primus actu triangulus, adjecto binario unitati feceramus; ad hic duos habet in latere, et senarium his adjecta ternarii quantitate produximus, cujus latus soli tres continent, et idem in aliis cunctis quot unitates habentem numerum superioribus aggregabis, tot unitatibus ejus latera continebuntur.

CAPUT X.

De quadrat's numeris.

Quadratus vero numerus est qui etiam ipse quidem latitudinem pandit, sed non in tribus angulis ut

A superior forma, sed quatuor. Ipse quoque æquali lateram dimensione porrigitur. Sunt autem hujusmodi :



CAPUT XI.

De eorum lateribus.

Sed in his quoque secundum naturalem numerum, laterum augmenta succrescunt. Primus enim vi et potentia quadratus, id est unitas, unum habet in latere. Secundus vero, qui actu primus, id est 4, duobus per latera positus continetur. Tertius vero, id est novem, qui secundus est opere, tribus in latere positus aggregatur. Et ad eandem sequentiam cuncti procedunt.

CAPUT XII.

De quadratorum generatione, rursusque eorum lateribus.

Nascuntur autem tales numeri ex naturalis numeri dispositione, non quemadmodum superiores trianguli, ut ordinatis ad se invicem numeris congregentur, sed uno semper intermisso, qui sequitur, si cum superiori vel superioribus colligatur, ordinatos ex se quadratos efficiet. Disponatur enim naturalis numerus hoc modo :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

Ex his igitur si unum respiciam, primus mihi natus est potestate quadratus. Quod si uno relicto priori tertium junxero, secundus mihi quadratus efficitur. Nam si uni relicto binario quaternarium apposuero, quaternarius mihi quadratus exoritur. Quod si rursus, relicto medio quaternario, quaternarium similiter aggregavero, quadratus mihi tertius, id est novenarius procreatur. Unus enim et 3 et 5 novem collignant. At vero si his, intermisso senario, septenarium jungam, tota in 16 ejus summa concrescit, id est quarti quadrati numerositas. Et ut breviter hujus forma procreationis appareat, si cuncti impares sibimet apponantur, collocato scilicet naturali numero, quadratorum ordo tertius. Est etiam in his hæc natura subtilitas et immobilis ordinatio, quod tot unitates unusquisque quadratorum retinebit in latere, quous fuerint numeri ad conjunctionem propriam congregati. Nam in primo quadrato, quoniam ex uno sit, unus est in latere. In secundo, id est quaternario, quoniam ex uno et tribus procreatur, qui duo sunt termini, binario latus textitur, et in novenario, quoniam tribus numeris procreatur, latus ternario continetur. Atque idem in aliis videri licet.

CAPUT XIII.

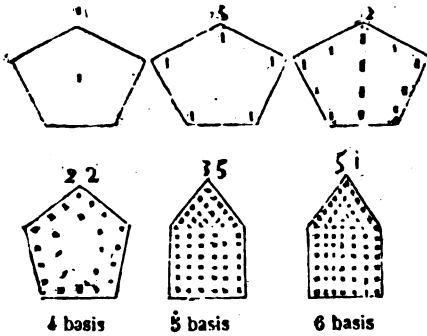
De pentagonis eorumque lateribus.

Pentagonus vero numerus est qui ipse quidem in

latitudinem secundum unitatem descriptis quinque A cum se binario superarent; pentagoni vero natura angulis continetur, cunctis scilicet lateribus aequali dimensione dispositis. Sunt autem hi :

1	5	12	22	35	51	70
---	---	----	----	----	----	----

Eodem quoque modo eorum latera succrescunt. Nam primi potestate pentagoni, id est unius, idem unus spatium lateris tenet. Secundi vero quinarium, qui est actu ipso atque opere primus pentagonus, bini per latera fixi sunt. Tertius vero, id est 12, tribus in latera auctus est. Quartus 22, 4 numerorum in latere quantitate distenditur. Atque idem in ceteris sequentium unitatis progressionem, in naturali scilicet numero, secundum superiorem figurarum incrementa venduntur.



CAPUT XIV.

De generatione pentagonorum.

Nascuntur autem hi numeri qui extensi in latitudinem, quinque angulos pandunt, ab eadem naturalis numeri quantitate in sese coarcevat, ita ut duobus semper interjectis numeris superiori vel superioribus, vincens ternario eum cui jungendus est aggregetur. Namque unitati, intermissis duobus et tribus, si quatuor jungas, qui tribus ipsam superent unitatem, quinarium pentagonum procreabitur. Post 4 vero si, intermisso quinario et senario, 7 agreges, duodenarium pentagonum procreabis. Namque 1 et 4 et 7 numeri 12 explebunt. Hoc etiam in aliis fiet. Nam si 10, vel 13, vel 16, vel 19, vel 22, vel 25 superioribus cunctis adunxeris, eodem quo superius modo pentagoni fient, secundum superiorem descriptionem.

22	35	51	70	92	117
----	----	----	----	----	-----

CAPUT XV.

De hexagonis eorumque generationibus.

Hexagoni autem, qui sex angulis, et heptagoni, qui 7 rursus lateribus continentur, secundum hunc modum eorum laterum augmenta succrescunt. Namque in trianguli numeri natura procreationeque ipsos numeros jungebamus, qui sese in naturali dispositione sequerentur, et se tantum unitate transirent; quadra vero numeri, id est tetragoni procreatio, fiebat ex numeris qui uno intermisso copulabantur,

fuit ex duobus interpositis relictiisque qui se ternario vincerent. Secundum quoque talia augmenta hexagonorum, vel octogonorum, vel 9 laterum figura, vel 10, vel quotlibet aliorum, competenti progressionem conficitur. Ut enim in pentagono, duobus intermissis eos jungebamus qui se ternario superarent, ita nunc in hexagono, tribus intermissis eos jungemus qui se quaternario transeant, et erunt quidem eorum radices et fundamenta, ex quibus junctis omnes hexagoni nascuntur.

1	5	9	13	17	21
---	---	---	----	----	----

Et ad eundem ordinem consequentes, atquo ab his sexangulorum formae nascuntur.

1	6	15	28	45	66
---	---	----	----	----	----

Quos ad superiorem modum, scilicet descriptos, in propriis ordinibus pernotabis.

CAPUT XVI.

De heptagonis eorumque generationibus, et communis omnium figurarum inveniendae generationis regula, descriptionisque.

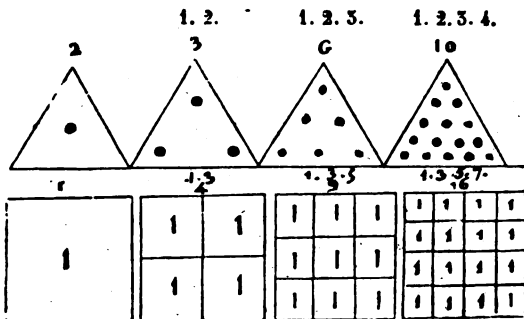
Septem vero angulorum figura est, cum ad eundem ordinem progressionis uno plus quam in sexangulorum figura numero intermisso superiori conjunxeris. Nam si quatuor interpositis, qui sese quinario vincant, aggregaveris, heptagoni continuo figura nascetur, ut hi numeri sint eorum radices, et (ut superius dictum est) fundamenta.

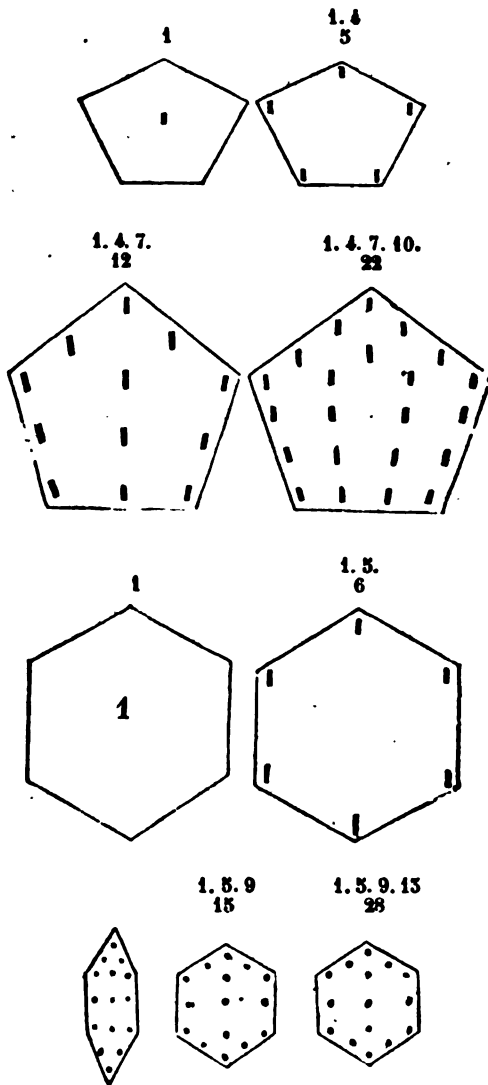
1	6	11	16	21
---	---	----	----	----

Qui vero ex his constant hi sunt.

1	7	18	34	55
---	---	----	----	----

Novem vero angulorum secundum eundem ordinem forma procreatur, ita ut secundum aequalem progressionem primi quoque eorum numeri distent. Nam in triangulo qui sunt numeri, quae prima superficies figura est, uno sese tantum numeri praecedunt, qui scilicet eorum naturam descriptionemque perficiunt. In tetragono vero qui secundus est, duobus sese juncti numeri vincunt, et in pentagono 3, et in hexagono 4, et in heptagono 5, huiusque rei nullus est modus. Hoc autem nos subjectarum formarum descriptiones docebunt.





CAPUT XVII.

Descriptio figurarum numerorum in ordine.

Similiter autem licebit et aliarum formarum, quæ pluribus angulis continentur, quantitates ascribere. Sed quoniam facilius oculis subjecta retinentur, suprad clarum formarum numerositas in subteriore descriptione ponatur.

Trianguli	1	3	6	10	15	21	28
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49
Pentagoni	1	5	12	22	35	51	70
Hexagoni	1	6	15	24	45	66	91
Heptagoni	1	7	18	31	55	81	112

CAPUT XVIII.

Qui figurati numeri ex quibus figuratis numeris fiunt, atque quod triangulus numerus omnium reliquorum principium sit.

Hæ igitur ita sese habentibus, quid in hac re sit consequens investigemus. Omnes enim tetragoni qui

A sub triangulis sunt naturali ordinatione dispositi, ex superioribus triangulis procreantur, illorumque collectione quadrati figura componitur. Quatuor enim tetragonus fit ex uno et tribus, id est ex duobus superioribus triangulis. Novem vero, ex tribus et 6, sed utriusque sunt trianguli. At 16 ex 6 et 10, et 25 ex 10 et 15. Idemque in sequenti ordine quadratorum constans atque immutabile reperitur. Pentagonorum vero summæ conficiuntur ex uno super se tetragono, et altrinsæcus triangulo constituto. Namque 5 pentagonus, ex quatuor super se posito tetragono, et ex uno qui in triangulorum ordine ponitur, aggregatur. Duodecim vero pentagonus, ex novenario super se quadrato, et tribus secundo triangulo nascitur. Viginti duo vero ex 16 et 6, quadrato scilicet atque triangulo, et 35 ex 25 et 10, et in ordinem ad eundem modum intuentem nulla cunctatio contrarietatis impedit. At vero si hexagonos librata examinatione perspicias, ex eisdem triangulis et super se positus pentagonis procreantur. Namque sex hexagonus ex quinario pentagono et uno qui est in triangulorum ordine dispositus nascitur. Nec alia est origo 15 hexagoni, nisi ex duodenario pentagono et ternario triangulo. Quod si 28 rursum hexagonum ex quibus superioribus nascatur addiscas, nullos invenies nisi 22 pentagonum senariumque triangulum. Atque hoc in cæteris. Nec hunc genituræ ordinem heptagonorum procreatio refutabit. Namque ex super se hexagonis, et ex eminus positis triangulis procreantur. Septem enim heptagonus nascitur ex senario hexagono, et uno potestate triangulo, 18 vero heptagonus ex 15 hexagono et ternario triangulo conjungatur, et 34 ex 28, scilicet hexagono et senario triangulo, atque hoc in cunctis inoffensum reperire licet. Videsne igitur ut primus omnium triangulus cunctorum summæ efficiat, et omnium procreationibus misceatur!

B

C

D

CAPUT XIX.

Pertinens ad figuratum numerorum descriptionem speculationem.

Hi vero omnes si ad latitudinem fuerint comparati, id est trianguli tetragonis, vel tetragoni pentagonis, vel pentagoni hexagonis, vel hi rursus heptagonis, sine aliqua dubitatione triangulis, sese superabunt. Namque si ternarium triangulum quaternario, vel quaternarium tetragonum quinario, vel quinarium pentagonum senario hexagono, vel senarium septenario heptagono compares, primo se triangulo, id est sola transeunt unitate. At vero si senarius contra novenarium, vel hic contra 12, vel hic contra 15, vel 15 contra 18 pro inveniendis differentiis comparentur, secundo se triangulo, id est ternario, superabunt. Decem vero ad 16, et 16 ad 22, et 22 ad 28, et 28 ad 34 si componas, tertio se triangulo vincant, id est senario. Atque hoc rite notabitur in aliis cupetis sequentibus esse perspectum, omnesque se triangulis antecedent. Quare perfecte, ut arbitrator, demonstratum est omnium formarum principium elementumque esse triangulum

CAPUT XX.

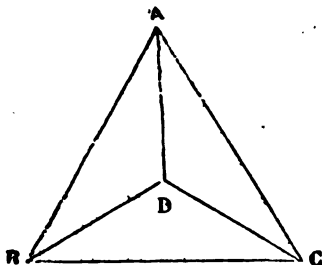
De numeris solidis.

Hinc vero ad figuras solidas facillior via est. Præcognito enim quid in planis numerorum figuris vis ipsa quantitatis naturaliter operetur, ad solidos numeros non erit ulla cunctatio. Sicut enim longitudini numerorum aliud intervallum, id est superficiem, ut latitudo ostenderetur, adjecimus, ita nunc latitudini si quis addat eam quæ alias altitudo, alias crassitudo, alias profunditas appellatur, solidum numeri corpus explebit.

CAPUT XXI.

De pyramide, quod ea sit solidarum figurarum principium, sicut triangulus planarum, et de speciebus.

Videtur autem quemadmodum in planis figuris triangulus numerus primus est, sic in solidis qui vocatur pyramis profunditatis esse principium. Omnium quippe ratarum in numeris figurarum necesse est invenire primordia. Est autem pyramis alias a triangula basi in altitudinem sese erigens, alias a tetragona, alias a pentagona, et secundum sequentium multitudines angularum ad unum cacuminis verticem sublevata. Posito enim triangulo atque disposito, si per tres angulos singulæ rectæ lineæ stantes ponantur, hæque tres inclinentur ut ad unum medium punctum vertices jungant, fit pyramis. Quæ cum a triangula basi profecta sit, tribus triangulis per latera concluditur hoc modo : Sit a, b, c, triangulum, si huic igitur triangulo per tres angulos erigantur lineæ, et ad unum punctum convertantur, quod est d, ita ut d punctum non sit in plano sed pendens, illæ scilicet lineæ ad ipsum erectæ verticem, et quodammodo cacumen d facient, et erit basis a, b, c, unum triangulum, per latera vero, tria triangula, id est unum triangulum a, d, b, aliud vero b, d, c, tertium vero c, d, a.



CAPUT XXII.

De his pyramidis quæ a quadratis vel a cæteris multiangulis figuris proficiscuntur.

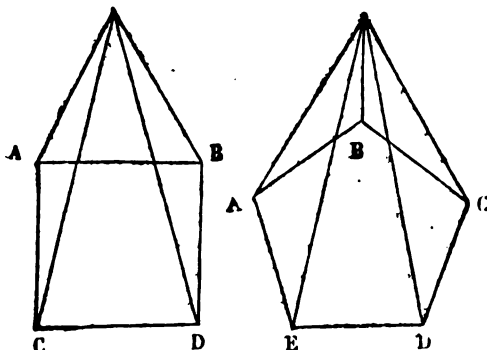
Item si a tetragona basi proficiscatur, et ad unum verticem ejus lineæ dirigantur, erit pyramis quatuor triangulorum per latera, uno tantum tetragono in basi posito, super quam figura ipsa fundata est, et si a pentagono surgant quinque lineæ, quinque rursus

PATROL. LXIII.

A pyramis triangulis continebitur, et si ab hexagono, sex triangulis nihilominus, et quantoscunque angulos habuerit figura super quam pyramis residet, tot ipsa per latera triangulis continetur, ut in subjectis descriptionibus palam est.

Pyramis ex tetragono

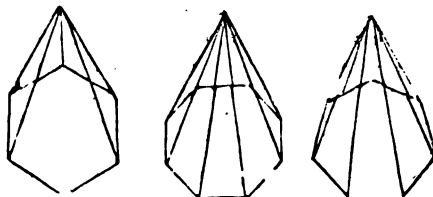
Pyramis ex pentagono



Pyramis ex hexagono

Pyramis ex octogono

Pyramis ex heptagono



CAPUT XXIII.

Solidorum generatio numerorum.

Dicuntur autem hujusmodi pyramides hoc modo : Prima pyramis de triangulo, secunda pyramis de tetragono, tertia pyramis de pentagono, quarta pyramis de hexagono, quinta pyramis de heptagono. Idem in cæteris constat numeris. Nam quoniam lineares numeros esse diximus qui ab uno profecti in infinitum current, ut sunt :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

His autem ordinatim compositis, et in se invicem cum distantia junctis, superficies nascebantur, ut si unum et duo jungeres, primus triangulus nasceretur, id est 3, et cum his adjungeremus tertium, id est ternarium, senarius triangulus rursus occurreret, et post hos, tetragoni, uno intermisso, pentagoni vero duobus, hexagoni tribus, heptagoni, relictis quatuor, nascebantur. Nunc vero ad solidorum corporum procreationem, ipsæ nobis superficies naturaliter figuratæ provenient, et ad faciendas quidem pyramidas a triangulo ipsi nobis trianguli componendi sunt. Ad procreandas vero pyramidas a tetragono, tetragoni, ad eas vero quæ sunt a pentagono, pentagoni copulandi sunt, et illæ quæ sunt ab hexagono vel heptagono, non nisi hexagonorum vel heptagonorum copulatione nascentur. Primus ergo potestate triangulus, unitas est, eandemque etiam ponemus virtute pyra-

midem; secundus vero triangulus est ternarius, quem si cum primo conjunxero, id est eum unitate, quaternaria mihi profunditas pyramidis excrescit. At vero si iis tertium senarium junxero, denaria pyramidis procreabitur altitudo. His si denarium junxero, 20 numerorum pyramis veniet, atque ita in cunctis aliis eadem ratio copulationis est.

Trianguli.									
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Pyramides a triangulis.									
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

In hac igitur conjunctione necesse est ut semper qui ultimus sit conjugatorum numerorum, is quasi quodammodo basis sit. Cunctis enim latior inventur; et qui ante ipsum numeri conjunguntur, minores esse necesse est, usque dum ad unitatem detractio rata perveniat, quæ puncti quodammodo et verticis obtineat locum. Namque in 10 pyramide super sex additi sunt 3 atque unus, qui senarius superat ternariam quantitatem, ipsi vero tres unum pluralitate transcendunt, qui unus extremum terminum progressionis offendit. Similis quoque ratio in cæteris prospici potest, si eorum procreations diligentius volueris perscrutari. Illæ vero quæ sunt a tetragono pyramides, eadem tetragonorum super se compositione nascuntur. Descriptis enim cunctis tetragonis, id est:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
---	---	---	----	----	----	----	----	----	-----

si unitatem primam ex hac dispositione præsumam, erit mihi potestate et vi pyramis ipsa unitas, nondum etiam opere atque actu. At si huic tetragonum superponam, id est 4, nascetur pyramis quinque numerorum, quæ duobus tantum numeris per latera positus continetur. Sin vero his sequentes 9 adjectero, fiet mihi 14 numerorum forma pyramidis, quæ per latera tribus unitatibus concludatur. Atque huic si sequentem tetragonum 16 superponam, tricenaria mihi pyramidis forma producitur. In his quoque omnibus pyramidibus tot erunt unitates per latera quantæ in se fuerint numerorum aggregatæ quantitates. Nam unitas, quæ prima pyramis est, unum solum, id est seipsam, gerit in latere. Quinque vero, quæ constant ex 1 et 4, duobus per latera designatur, et 14, quæ ex tribus numeris compositis fit, ternario numero in latere posito constituitur. Hanc autem pyramidum generationem monstrat subjecta descriptio:

Tetragoni.									
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pyramides a tetragonis.									
1	5	14	30	55	91	140	204	285	383

Et ad eundem modum cunctæ a cæteris multiangulis profectæ formæ, in altioris summæ spatia producantur. Omnis enim multorum angulorum forma, ex sui generis figura unitati superposita, ab uno ingredientibus ad pyramidum constituendas figuras usque in infinita progreditur. Et ex hoc equidem apperere necesse est triangulas formas cæterarum figu-

rarum esse principium, quod omnis pyramis a quacunque basi profecta, vel a quadrato, vel a pentagono, vel ab hexagono, vel ab heptagono, vel a quocunque simillium, solis triangulis usque ad verticem continetur.

CAPUT XXIV.

De curtis pyramidis.

Scire autem oportet quæ sunt curtæ pyramides. vel quæ bis curtæ, vel quæ ter curtæ, vel quater, et deinceps secundum numerum adjunctionem. Perfecta enim pyramis est quæ, a qualibet basi profecta, usque ad primam vi et potestate pyramidum pervenit unitatem. Sin vero, a qualibet basi profecta, usque ad unitatem altitudo illa non venerit, curta vocabitur. Recteque hujusmodi pyramis tali nuncupatione signatur, si usque ad extremitatem punctumque non venerit. Hæc autem est, ut si quis 16 tetragono adiciat 9, atque huic 4, et ab ulterioris sese adjunctione unitatis suspendat, pyramis quidem figura est, sed quoniam usque ad cacumen verticis non excrevit, curta vocabitur, et habebit summitatem non jam punctum quod unitas est, sed superficiem, quod est quilibet numerus secundum basis illius angulos porrectus, atque ultimus aggregatus. Nam si tetragona fuerit basis, quadrata diminutione semper ascendit, et si pentagona basis, similiter et si hexagona, illa quoque ultima superficies erit hexagona. Ergo in curta pyramide, tot erit angulorum superficies quot fuerit basis. Si vero illa pyramis non solum ad unitatem extremitatemque non pervenit, sed nec ad primum quoque opere et actu multiangulum ejus generis cujus fuerit basis, bis curta vocabitur, ut si, a 16 tetragono proficiscens, usque in 9 terminum ponat, neque excrescat ad 4, et quocunque tetragoni defuerint, totiens eam curtam esse dicemus. Ut si unitas defuerit primus quadratus, curtam, quam Græci koluron vocant. Si vero duobus tetragonis, deficit, id est unitate et eo qui sequitur, vocatur bis curta, quam Græci dikoluron appellant. Quod si tribus tetragonis, ter curta dicitur quam Græci tricoluron nominant, et quocunque tetragoni fuerint minus, totiens illam pyramidem curtam esse proponimus. Hoc autem non solum a tetragono pyramidis, sed in omnibus ab omni multiangulo progredientibus speculari licet.

CAPUT XXV.

De cubis, vel asseribus, vel laterculis, vel cuneis, vel sphaericis, et parallelipipedis numeris.

Ac de solidis quidem quæ pyramidis formam obtinent æqualiter crescentibus, et a propria velut radice multianguli figura progredientibus, dictum est. Est alia rursus quædam corporum solidorum ordinabilis compositio, eorum qui dicuntur cubi vel asseres, vel laterculi, vel cunei, vel sphaeræ, vel parallelipiedi, quæ sunt quotiens superficies contra se sunt, et ductæ in infinitum nunquam concurrent. Dispositis enim in ordinem tetragonis,

1	4	9	16	25
---	---	---	----	----

quoniam hi solam longitudinem latitudinemque sortiti sunt, et altitudine carent, si per latera solam unam multiplicationem recipiant, æqualem provehant profunditatem. Nam quatuor tetragonus, duos habet in latere, et natus est ex bis duobus. Bis enim duo quatuor faciunt. Hos ergo duos ex ipsis latere si multiplices æqualiter, cubi forma nascetur. Nam si bis binos bis facies, octonaria quantitas crescit, et est primus hic cubus. Novem vero tetragonus, quoniam 3 habet in latere, et factus est ex tribus in se multiplicatis, si enim unam lateris multiplicationem adjunxeris, rursus alius cubus æquali laterum formatione crescit. Ter enim tres si tertio duxeris, 27 cubi figura producitur. Et 16, qui est ex 4, si quater augeat, sexaginta quatuor cubus pari laterum dimensionem crassabitur, et sequentes quidem tetragoni, secundum eundem modum, multiplicatione facti, provehuntur. Tot autem necesse est unitates cubus habeat in latere, quot habuit primus ille tetragonus ex quo ipse productus est. Nam quoniam 4 tetragonus duos tantum numeros habet in latere, duos quoque habet octonarius cubus, et quoniam novem tetragonus tribus per latus unitatibus figurabatur, solo ternario 27 cubi latus argetur. Et quoniam 16 tetragonus quatuor unitatum latus habebat, totidem 64 cubus in latere gestabit unitates. Quare etiam vi et potestate cubi, quod est unitas, unus erit in latere. Omnis enim tetragonus una quidem superficie est quatuor angulorum, totidemque laterum. Omnis autem cubus qui ex tetragonorum superficie in profunditatem corporis crevit, per tetragoni scilicet latus multiplicatus, habebit quidem superficies 6, quarum singula planitudo tetragono illi priori æqualis est. Latera vero 12, quorum unumquodque singulis his quæ superioris fuere tetragoni æquum est, et, ut superius demonstravimus, tot unitatum est. Angulos vero 8, quorum singulus sub tribus hujusmodi continetur, quales priores fuere tetragoni unde cubus ipse productus est. Ergo ex naturaliter profuso numero, qui in subjecta forma descripti sunt, subjecti tetragoni nascuntur, et ex his tetragonis qui subnotati sunt cubi provehuntur.

Numerus naturalis.

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

Tetragoni.

1	4	9	16	25	36	49
---	---	---	----	----	----	----

Cubi.

1	8	27	64	125	216	343
---	---	----	----	-----	-----	-----

Et quoniam omnis cubus ab æquilateris quadratis profectus, æquus ipse omnibus partibus est, nam et latitudini longitudo, et his duobus compar est altitudo, et secundum sex partes, id est sursum, deorsum, dextra, sinistra, ante, post, sibi æqualem esse necesse est: huic oppositum contrariumque esse oportebit, qui neque longitudinem latitudini, neque hæc duo profunditati gerat æqualia, sed cunctis inæqualibus, quamvis solida figura sit, ab æqualitate cubi longissime distare videatur. Ili autem sunt, ut si quis fa-

ciat bis tres quater, vel ter quater quinquies, et alia hujusmodi, quæ per inæquales spatiorum gradus inæqualiter provehuntur. Hæc autem forma Græco nomine scalenos vocatur, nos vero gradatam possumus dicere, quod a minore modo velut gradibus crescat ad majus. Vocant autem eandem figuram Græci quidam sperniscoon, nos autem cuneum possumus dicere. Etenim quos ad quamlibet illam rem constringendam cuneos formant, neque latitudinis, neque longitudinis, neque altitudinis, habita ratione, quantum commodum fuerit, tantum vel altitudini minuitur, vel crassitudini profunditatis augetur. Atque ideo hos plerumque necesse est omnibus partibus inæqualibus inveniri. Quidam vero hos homiscos vocant, id est quasdam arulas quæ in Ionica Græciæ regione (ut ait Nicomachus) hoc modo formatae fuerunt, ut neque altitudo latitudini, neque hæc longitudini convenirent. Vocatur autem aliis quibusdam nominibus, quæ nunc prosequi supervacuum judicamus. Igitur cubi æqualibus spatiis se porrigentibus et hujus formæ, quam diximus, gradata distributione disposita, medietates sunt, quæ neque cunctis partibus æquales sunt, neque omnibus inæquales, quos Græci parallelepipedos vocant. Latini nomen hoc ita uniformiter compositum habere non possunt. Ut tamen idem pluribus dictum sit, ea namque hoc nomine vocatur figura, quæ alternatim positis latitudinibus continetur.

CAPUT XXVI.

De parte altera longioribus numeris, antelongioribus, eorumque generationibus.

Hujusmodi vero formas quales sunt quæ vocantur a Græcis heteromikeis, nos dicere possumus parte altera longiores, quarum figurarum numerus quoque hoc modo diffiniendus est. Parte altera longior est numerus, quem si in latitudinem describas, et ipsa quidem 4 provenit laterum et 4 angulorum, sed non cunctis æqualibus, sed semper minus uno. Namque nec latera lateribus, cuncta cunctis æqua sunt, nec longitudini latitudo, sed (ut dictum est) cum hinc altera pars major fuerit, uno tantum minorem præcedit ac superat. Si enim numerum naturalem disponas in ordinem, et secundum per primum multiplices, talis nascetur numerus; vel si secundum per tertium, vel si tertium per quartum, vel si quartum per quintum, omnesque hi unitate tantum addita multiplicentur, nascuntur parte altera longiores. Disponatur enim numerus naturalis.

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

Et tunc quidem hæcenus. Si quis igitur faciat unum bis, faciet duo. Et rursus bis tres faciet 6, ter quater faciet 12, quater 5 faciet 20, et hoc modo ad eundem ordinem. Quicumque igitur ita facti sunt, procreabuntur parte altera longiores, ut subjecta descriptio docet. In qua, ex quibus numeris multiplicati nascuntur parte altera longiores, supra ascripti sunt. Qui vero nascantur, subterius subnotati.

1	2	3	4	5	6
2	6	12	20	30	
	1	1 1	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
		1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1
1	1	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1
		1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1

CAPUT XXVII.

De anteliongioribus numeris, et de vocabulo numeri parte altera longioris.

Ergo si ab unitate tantum discrepent qui multiplicentur, descripti superius numeri protendentur. Si vero aliquo numero, ut ter septem, vel ter quinque, vel aliquo modo alio, et non eorum latera sola discrepent unitate, non vocabitur hic numerus parte altera longior, sed anteliongior. Alterum enim apud Pythagoram vel sapientiæ ejus hæredes, nulli alii nisi tantum binario ascribebatur. Hunc alteritatis principium esse dicebant. Eandem autem naturam, et semper sibi similem consentientemque, nullam aliam nisi primævam ingeneratamque unitatem. Binarius autem numerus, primus est unitati dissimilis, idcirco quod primus ab unitate disjungitur, at ne ideo alteritatis cujusdam principium fuit, quod ab illa prima et semper eadem substantia, sola tantum est unitate dissimilis. Merito ergo dicentur hi numeri parte altera longiores, quod eorum latera unius tantum sese adjecta numerositate præcedunt. Argumentum est autem alteritatem in binario numero juste constitui, quod non dicitur alterum nisi e duobus ab his in quos bene loquendi ratio non negligitur. Amplius quod impar numerus, sola unitate perfici monstratus est, par vero sola dualitate, id est solo binario numero. Nam cujuscunque medietas est unus, ille impar est, cujus vero 2, hic paritatis recepta, in gemina æqua disjungitur. Quare dicendum est imparium numerum, ejusdem atque in sua se natura tenentis, immutabilisque substantiæ esse participem, idcirco quod ab unitate formetur, parem vero, alterius plenum esse naturæ, idcirco quod a dualitate completur.

CAPUT XXVIII.

Quod ex imparibus quadrati, ex paribus parte altera longiores fiant.

At vero positis in ordinem ab unitate imparibus, et sub his a dualitate paribus descriptis, coacervatio imparium tetragonos facit, coacervatio parium superiorum effecti parte altera longiores. Quare, quoniam tetragonorum hæc natura est, ut et ab imparibus procreentur, qui sunt unitatis participes, id est ejusdem immutabilisque substantiæ, cunctisque partibus suis æquales sint, quod et anguli angulis, et latera lateribus, et longitudini compar est latitudo, dicendum est hujusmodi numeros ejusdem naturæ atque immutabilis substantiæ participes. Illos vero numeros, quos parte altera longiores paritas creat, alterius dicemus esse substantiæ. Nam quemadmodum unus a duobus uno tantum alter est, sic horum latera a se tantum uno sunt altera, et una tantum diffe-

rent unitate. Quare disponentur in ordinem omnes ab uno impares. et sub his omnes a binario numero pares.

1	3	5	7	9	11	13
2	4	6	8	10	12	14

Est ergo princeps imparis ordinis, unitas, quæ ipsa quidem effectrix et quodammodo formæ quædam est imparitatis. Quæ intantum ejusdem nec mutabilis substantiæ est, ut cum vel seipsam multiplicaverit, vel in planitudine, vel in profunditate, vel si alium quemlibet numerum per seipsam multiplicet, a prioris quantitatis forma non discrepet. Namque si unum semel facies, vel si semel unum semel, vel si duo semel, vel si tres semel, vel si quatuor semel, vel si quemlibet alium numerum multiplicet, a quantitate sua is quem multiplicat numerus non recedit, quod circa alium numerum non potest inveniri. Paris vero ordinis, binarius numerus princeps est, quæ dualitas cum in eodem ordine paritatis sit, tum principium totius est alteritatis. Namque si sese ipsam multiplicet, vel per latitudinem, vel etiam profunditate em, vel si quem numerum in suam conglobet quantitatem, continuo alter exoritur. Nam bis duo, vel bis duo bis, si facias, vel bis 3, vel bis 4, vel bis 5, vel quemlibet alium multiplicet, quisquis hinc nascitur, alius quam primo fuerat, invenitur. Nascuntur autem ex superiore descriptione, et ex primo ordine omnes tetragoni hoc modo: Unum enim si respexeris, primus potestate tetragonus est. Sin vero unum tribus coacervaveris, 4 tetragonus exoritur. Huic si quinarium jungam, novenarius rursus occurrit. Huic si copules 7, 16 quadrati forma se suggerit. Idemque si in cæteris facias, omnes competenter quadratos videas procreari. At vero ex secundo paritatis ordine, iidem cuncti parte altera longiores sunt. Namque si duos primos respexero, hujusmodi mihi numerus occurrit qui fit ex bis uno. Cum vero duobus sequentes 4 junxero, parte altera longior rursus erit senarius, scilicet qui fit ex bis tribus. Cui si sequentem aggregavero, nascetur mihi duodenaria forma, quæ fit ex quater tribus. Quod si continuatim quæ faciat, cunctos hujusmodi numeros in competentem ordine procreatos videbit. Quam descriptionem scilicet inferior forma demonstrat:

B

C

Radices.				
1	1, 3	1, 3, 5	1, 3, 5, 7	1, 3, 5, 7, 9
Tetragoni, id est quadrati.				
1	4	9	16	25
Radices.				
2	2, 4	2, 4, 6	2, 4, 6, 8	2, 4, 6, 8, 10
Parte altera longiores.				
2	6	12	20	30

CAPUT XXIX.

De generatione laterculorum, eorumque diffinitione.

Quos autem superius laterculos diximus, quæ sunt et ipsæ quidem solidæ figuræ, hoc modo fiunt. Quotiens æqualibus spatiis in longitudinem latitudinemque porrectis, minor his additur altitudo. Ut sunt

hujusmodi 3 ter bis, qui sunt 18, vel 4 quater bis, vel alio quolibet modo, ut his in longitudinem, latitudinemque æquis, minor altitudo ducatur. Hi definiuntur hoc modo: Laterculi sunt, qui fiunt ex æqualibus æqualiter in minus. Asseres vero et ipsæ quidem figuræ sunt solidæ, sed hoc modo ut ex æqualibus æqualiter ducantur in majus. Nam si æqua fuerit latitudo longitudini, et major sit altitudo, illæ figuræ a nobis asseres, a Græcis elocides nominantur, ut si quis hoc modo faciat 4 quater novies, qui inde procreantur, asseres nominati sunt. Sphenisci vero, quos cuneolos superius appellavimus, hi sunt qui, ex inæqualibus inæqualiter ducti, per inæqualia crevere; cubi vero, qui ex æqualibus æqualiter per æqualia producti sunt.

CAPUT XXX.

De circularibus vel sphericis numeris

Ipsorum vero cuborum quancumque fuerint ita ducti, ut a quo numero cubicæ quantitatis latus cœperit, in eundem altitudinis extremitas terminetur, numerus ille cyclicus vel sphericus appellatur, ut sunt multiplicationes quæ a quinario vel senario proficiscuntur. Nam quinquies quinque, qui sit 25, ab 5 progressus, in eosdem 5 desinit. Et si hos rursus quinquies ducas, in eosdem 5 eorum terminus veniet. Quinquies enim 25 fiunt 125, et si hos rursus quinquies ducas, in quinarium numerum extremitas terminabitur. Atque hoc usque in infinitum idem semper evenit. Quod in senario quoque convenit considerari. Hi autem numeri idcirco cyclici vel spherici vocantur, quod sicut sphaera vel circulus, in propriis semper principii reversione formantur. Est enim circulus posito quodam puncto et alio eminens defixus, illius puncti qui eminens fixus est æqualiter distans a primo puncto circumductio, et ad eundem locum reversione unde moveri cœperat. Sphaera vero est semicirculi, manente diametro, circumductio et ad eundem locum reversione unde prius cœperat ferri. Unitas quoque, virtute et potestate, ipsa quoque circulus vel sphaera est, quoties enim punctum in se multiplicaveris, in seipsam unde cœperat terminatur. Si enim faciat semel unum, unus redit, et si hoc rursus semel, idem est. Igitur si una fuerit multiplicatio, solum planitudinem reddit, et fit circulus. Si secunda, mox sphaera conficitur. Et enim secunda multiplicatio, effectrix semper est profunditatis. Ex 5 igitur et 6, paucas hujusmodi formas subscripsimus:

	1	5	6
	1	25	36
	1	125	216
	1	625	1296
	1	3125	7776

CAPUT XXXI.

De natura rerum quæ dicitur ejusdem naturæ, et de ea quæ dicitur alterius naturæ, et qui numeri cui naturæ conjuncti sunt.

Ac de solidis quidem figuris, hæc ad præsens dicta sufficiant. Qui autem de natura rerum propinquis

A investigantes rationibus, quique in matheseos disputatione versati, quid in quaque re esset proprium, subtilissime peritissimeque ediderunt, hi rerum omnium naturas in gemina dividente, hac speculatione distribuunt. Dicunt enim omnes omnium rerum substantias constare ex ea quæ propriæ suæque semper habitudinis est, nec ullo modo permutatur, et ea scilicet natura quæ variabilis motus est sortita substantiam. Et illam primo immutabilem naturam, unius ejusdemque substantiæ vocant, hanc vero alterius, scilicet quod a prima illa immobili discedens prima sit altera. Quod nimirum ad unitatem pertinet, et ad dualitatem, qui numerus primus ab uno discedens, alter factus est. Et quoniam cuncti secundum unitatis speciem naturamque impares numeri formati sunt, B quoque ex his coæcervatis tetragoni fiunt, duplici modo ejusdem substantiæ participes esse dicuntur, quod vel ab æqualitate formantur tetragoni, vel coæcervatis in unum numeris imparibus procreantur. Illi vero qui sunt pares, quoniam binarii numeri formati sunt, quique ex his coæcervati collectique in unam congeriem, parte altera longiores numeri nascuntur, hi secundum ipsius binarii numeri naturam, ab ejusdem substantiæ natura discessisse dicuntur, putanturque alterius naturæ esse participes, idcirco quoniam cum latera tetragonorum ab æqualitate progressa, in æqualitatem propriæ latitudinis ambitum tendant, hi adjecto uno ab æqualitate laterum discesserunt, atque ideo dissimilibus lateribus et quodammodo alteris a se conjunguntur. Quare nobis notum C est, quod ex his ea quæ sunt in hoc mundo, conjuncta sunt. Aut enim propriæ, immutabilis, ejusdemque substantiæ est, quod Deus, vel anima, vel mens est, vel quodcumque propriæ naturæ incorporalitate beatur, aut mutabilis, variabilisque naturæ, quod corporibus indubitanter videmus accidere. Unde nunc nobis monstrandum est, hac gemina numerorum natura, quadratorum scilicet et parte altera longiorum, cunctas numeri species cunctasque habitudines, vel relatae ad aliquid quantitatis, ut multiplicium vel superparticularium et cæterorum, vel ad seipsam consideratæ, ut formarum quas dudum in superiore disputatione descripsimus informari, ut quemadmodum mundus ex immutabili, muabilique substantia, sic omnis numerus ex tetragonis, qui immutabilitate D perficiuntur, et ex parte altera longioribus, qui mutabilitate participant, probetur esse conjunctus. Et primo quidem distribuendum est, qui sunt hi quos promecas vocant, id est anteriore parte longiores, vel qui quos heteromikeis, id est parte altera longiores. Est enim parte altera longior numerus quicumque unitate tantum lateri crescit adjecta, ut sunt 6 scilicet bis 3, vel 12 tres quater, et consimiles. Anteriore vero parte longior est qui sub duobus numeris hujusmodi continetur, quorum latera non possidet unitatis differentia, sed aliorum quorumcunque numerorum, ut ter 5, vel ter 6, vel quater 7. Quodammodo enim longitudine in prolixiorem modum porrecta, merito anteriore parte longior dicitur. Cur autem parte altera longiores numeri

dicantur, supra jam dictum est. Quadrati vero, quoniam æquam latitudinem longitudini gerunt, propriæ longitudinis vel ejusdem latitudinis aptissime vocabuntur, ut bis 2, ter 3, quater 4, et cæteri. Parte altera vero longiores, quod non eadem longitudine tendantur, alterius quodammodo longitudinis, et parte altera longiores vocantur

CAPUT XXXII.

Quod omnia ex ejusdem natura et alterius natura consistunt, idque in numeris primum videri.

Omne autem quidquid in propria natura substantiæ est immobile, terminatum definitumque est, quippe quod nulla variatione mutetur, nunquam esse desinat, nunquam possit esse quod non fuit. At hæc, unitas sola est, et quæ unitate formantur, comprehensibilis et determinatæ et ejusdem substantiæ esse dicuntur. Ea vero sunt, quæ vel ab æqualibus crescunt velut quadrati, vel quos ipsa unitas format, id est, impares. At vero binarius et cuncti parte altera longiores, qui a finita substantia discesserunt, variabilis infinitæque substantiæ nominantur. Constat ergo numerus omnis ex his quæ longe disjuncta sunt atque contraria, ex imparibus scilicet et paribus. Hic enim stabilitas, illic instabilis variatio; hic immobilis substantiæ robor, illic mobilis permutatio; hic definita soliditas, hic infinita congeries multitudinis. Quæ, scilicet, cum sint contraria, in una tamen quodammodo amicitiam cognationemque miscentur, et illius unitatis informatione atque regimento, unum numeri corpus efficiunt. Non ergo inutiliter neque improvide, qui de hoc mundo, deque hac communi rerum natura ratiocinabantur, hanc primam totius modi substantiæ divisionem fecerunt. Et Plato quidem in Timæo ejusdem naturæ, et alterius nominat, quidquid in mundo est, atque aliud in sua natura permanere putat individuum inconjunctumque et rerum omnium primum, alterum divisibile et nunquam in proprii statu ordinis permanens. Phylaus vero: Necessè est, inquit, omnia quæ sunt vel infinita vel finita esse. Demonstrare scilicet volens omnia quæcunque sunt ex his duobus consistere, aut ex infinita, scilicet esse, aut ex finita, ad numeri sine dubio similitudinem. Hic enim ex uno et duobus, et impari atque pari conjungitur. Quæ manifesta sunt, æqualitatis atque inæqualitatis, ejusdem atque alterius, definitæ atque indefinitæ esse substantiæ. Quod videlicet non sine causa dictum est, omnia quæ ex contrariis consistenter, harmonia quadam conjungi atque componi. Est enim harmonia, plurimorum adunatio, et dissentientium consensio.

CAPUT XXXIII.

Ex ejusdem atque alterius numeri natura, qui sunt quadrati et parte altera longior, omnes proportionum habitudines constare.

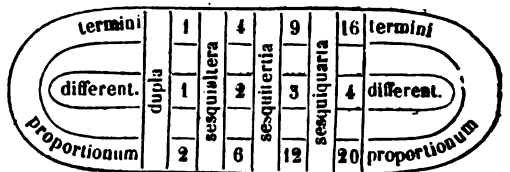
Disponantur ergo in ordinem non jam pares atque impares, ex quibus quadrati vel parte altera longiores sunt, sed hi ipsi qui illis concervatis in unumque redacti, et quadrati et parte altera longiores prodeunt. Ita enim videbimus istorum quendam con-

A sensum, et ad cæteras numeri partes procreandas amicitiam, ut non sine causa hoc in omnibus rebus ab numeri specie natura rerum sumpsisse videatur. Sint igitur duo versus tetragonorum ab unitate omnium, et a binario numero parte altera longiorum.

1	4	9	16	25	36	49
2	6	12	20	30	42	56

Horum igitur si primum compares primo, dupli quantitas invenitur, quæ est prima multipliciter species. Si vero secundum secundo, hemiolia quantitates habitudo producitur. Si tertium tertio, sesquialtera proportio procreantur. Si quartum quarto, sesquiquarta, et si quintum quinto, sesquiquinta. Et hinc superparticularium normam in quodvis longissimum spatium progrediens integram inoffensamque reperies. Ita ut in prima dupli proportionione unitatis solius sit differentia. Duo namque ab uno sola semper discrepant unitate. In sesquialtera vero duorum est differentia, in sesquitertia trium, in sesquiquarta 4, et deinceps, secundum superparticulares formas numerorum, quod ad differentias attinet, uno tantum crecit adjecto numerum explicans naturalem.

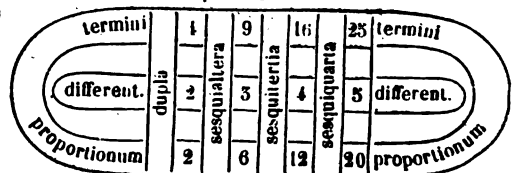
Tetragonum



Altera parte longiores.

Sin vero secundum tetragonum, primo parte altera longiori compares, et tertium secundo, et quartum tertio, et quintum quarto, easdem rursus proportionem effici pernotabis quas in superiore forma descripsimus. Sed hic differentia ab unitate non inchoant, sed a binario numero in infinitum per eodem calculo progrediuntur. Eritque secundus primi duplus, tertius secundi sesquialter, quartus tertii sesquitercius, secundum eandem convenientiam quæ superius demonstrata est.

Tetragonum



Altera parte longiores.

Rursus quadrati invicem imparibus differunt, parte altera longiores, paribus.

Differentiæ impares.

1	3	5	7	9	11	13
1	4	9	16	25	36	49

Quadrati.

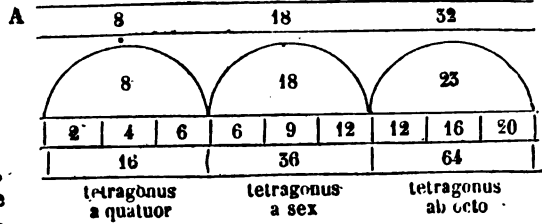
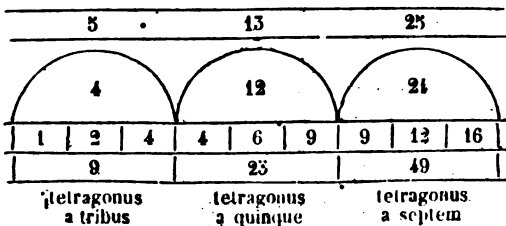
Differentiæ pares.

	4	6	8	10	12	14
	2	6	12	20	30	42
	Parte altera longiores.					

At vero si inter primum et secundum tetragonum, primum parte altera longiorem ponimus, ad utrosque eos una proportione conjungitur. In utrisque enim proportionibus dupli multiplicitas invenitur. Sin vero inter secundum tertiumque tetragonum, secundum parte altera longiorem ponas, sesquialteræ comparationis ad utrosque forma componitur. Et si inter tertium et quartum tetragonum, tertium parte altera longiorem constituas, sesquitertia species nascetur, et idem si in cunctis feceris, cunctas super particulares species invenire miraberis.

tetragoni	primus 1	parte altera longiores	primus 2	tetragoni	secundus 4	duplus
	secundus 4		secundus 6		tertius 9	sesquialter
	tertius 9		tertius 12		quartus 16	sesquitercius
	quartus 16		quartus 20		quintus 25	sesquiquartus

Et ad eundem modum in cæteris convenit intueri. Rursus si ponantur duo tetragoni ex superius descriptis, id est primus et secundus, et in unum colligantur, et medius eorum parte altera longior bis multiplicetur, tetragonus fit. Namque unus et 4, si jungantur, 5 faciunt, eorum binarius parte altera longior si bis ducatur, quatuor faciunt, qui juncti, 9 sine ulla dubitatione facient, qui est numerus quadratus. Et ad eundem modum in aliis hoc modo dispositis numeris, quos supra descripsimus, idem constat intelligi. Si vero convertas, et inter duos primum et secundum parte altera longiores secundum tetragonum ponas, qui in ordine quidem secundus est, sed actu et opere primus, ex duobus parte altera longioribus congregatis, et bis multiplicato medio tetragono, rursus tetragonus conficitur. Namque inter 6 et binarium numerum, qui sunt primus et secundus parte altera longiores, si ponatur quaternarius ordine secundus, primus actu tetragonus, et conjungantur duo et sex, faciunt 8. Tum si bis ducantur medii, quatuor faciunt rursus octonarium, qui cum superioribus juncti, sedecim tetragonum pandunt.



Illud quoque non oportet minore admiratione suscipere, quod secundum proprias naturas, ubi altrinsecus duo tetragoni stant, et unus parte altera longior in medio ponitur, tetragonus qui nascitur, ille semper ab impari procreatur. Nam ex superioribus, uno et 4 et bis multiplicato binario, factus est novenarius tetragonus, qui scilicet a tribus procreatur. Ter enim tres 9 faciunt, qui ternarius impar est numerus. Et sequens qui ex quatuor et 9, et bis multiplicato senario conjunctus, est 25 tetragonus, et ipse ex impari quinario nascitur continenti post ternarium. Quinquies enim quinque 25 procedunt, et quinarium post ternarium, impar est numerus. Et in sequenti quoque eadem ratio est. Nam qui ex 9 et 16 et bis ducto 12 quadratus 49 producitur, ille a senario impari fit post quinarium continenti. Septies enim septem 49 creant. At vero ubi duo altrinsecus parte altera longiores unum medium tetragonum claudunt, omnes ex his qui sunt tetragoni, a paribus producuntur. Nam qui ex duobus et 6 parte altera longioribus et quaternario bis multiplicato, 16 tetragonus factus est, ille a quaternario numero, id est pari, producitur. Quater enim quatuor 16 sunt. Et in sequenti quoque ordine ubi ex senario et duodecim, et bis in suam summam ducto novenario, 36 fiunt, ex continenti pari senario copulantur. Sex enim sexies 36 restituunt. Nec minus in eadem rationem cadet, ex 12 et 20 et bis 16 factus 64 tetragonus. Hic enim ex octonario continenti post senarium nascitur. Octies enim octo 64 tetragonum jungunt. Et in aliis quoque secundum eundem modum si idem facias, rationis ordo non discrepat.

CAPUT XXXIV.

Quod ex quadratis ex parte altera longioribus, omnis formarum ratio consistat.

Illud vero, quod ex his duobus tota omnium formarum videtur orta prolatio non minore consideratione notandum est. Namque trianguli qui cunctas alias formas, sicut superioribus docuimus, collecti producent, his junctis velut ex quibusdam elementis oriuntur. Namque ex uno primo tetragono, et binario primo parte altera longiore, ternarius triangulus copulatur. Et ex binario vel quaternario, id est ex secundo tetragono senarius triangulus procreatur. Ex quaternario quoque et senario, denarius triangulus nascitur. Et ad eundem ordinem, cuncta triangulorum ratio constabit. Disponantur enim alternatim inter se tetragoni et parte altera longiores, qui ut melius pernotarentur, prius in duobus eos versibus disposimus, post autem eosdem permiscuimus, et qui exinde trianguli nascentur descripsimus.

Tetragoni.											
1	4	9	16	25	36	49	64	81			
Parte altera longiores.											
2	6	12	20	30	42	56	72	90			
Tetragoni et altera parte longiores alternati.											
1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	

Trianguli.
CAPUT XXXV.

Quemadmodum quadrati ex parte altera longioribus, vel parte altera longiores ex quadratis fiant.

Omnis vero tetragonus si ei proprium latus addatur, vel eodem rursus dematur, parte altera longior fit. Namque 4 tetragono si quis duo jungat, vel duo detrahat, 6 addendo perficiet et duo detrahendo, at uterque figuram continet parte altera longiorem, quæ, scilicet magna, est alteritatis vis. Omnis enim infinita et indeterminata potentia, ab æqualitatis natura, et a suis se finibus continenti substantia discedens, aut in majus exuberat, aut in minoræ decrescit

CAPUT XXXVI.

Quod principaliter ejusdem quidem sit substantiæ unitas, secundo vero loco impares numeri, tertio quadrati, et quod principaliter dualitas alterius sit substantiæ, secundo vero loco pares numeri, tertio parte altera longiores.

Constat igitur primo quidem loco, unitatem propriæ immutabilisque substantiæ ejusdemque naturæ, dualitatem vero primam, alteritatis mutationisque esse principium. Secundo vero loco, omnes impares numeros propter unitatis cognationem, ejusdem atque immutabilis substantiæ esse participes, pares vero ob binarii numeri consortium, alteritatibus esse permixtos. Tetragonos quoque ad eundem modum considerari manifestum est. Nam quod eorum compositio et conjunctio ex imparibus fit, immutabili naturæ pronuntiatio conjunctos. Quod vero parte altera longiores ex copulatione parium, procreantur, nunquam ab alteritatis varietate separantur.

CAPUT XXXVII.

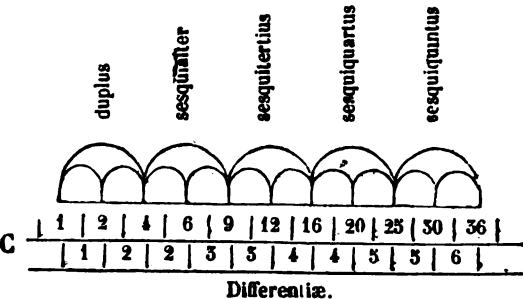
Alternatim positi quadratis, et parte altera longioribus, qui a se eorum consensus, in differentia et in proportione.

Illud igitur perspicendum est, quod si idem tetragoni et parte altera longiores disponantur, ita ut alternatim sibi permixti sint, tanta in his est conjunctio, ut alias sibi in eisdem proportionibus communitent, discrepent autem differentiis. Alias vero differentiis, pares sint, proportionibus distent. Disponantur enim in ordinem iidem illi superiores tetragoni, et parte altera longiores ab uno.

1	2	4	6	9	12	16	20	25	30
---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

Ergo in superiore formula hoc maxime intueendum est. Namque inter unum, qui est tetragonus, et 2, dupla proportio est, inter 2 et 4 dupla. Hic ergo tetragonus, cum parte altera longiore, atque hic cum sequente tetragono, eadem proportione junguntur, differentiis vero non iidem. Namque duorum atque unius sola unitas differentia est, sed iidem duo a

A quaternario solo binario relinquuntur. Rursus, si 2 ad 4 speculeris, dupla est proportio: si quatuor ad sex, habitudinem sesquialteram recognosces. Hic ergo in proportionibus discrepant, in differentiis pares sunt. Namque et quatuor a duobus, et 6 a quatuor, eodem binario distant. In sequentibus etiam eodem modo sicut in primis fuit, ratio constat. Nam eadem proportio est differentiis non eisdem. Nam 4 ad 6 et 6 ad 9, sesquialtera proportione junguntur, 6 autem quaternarium duobus, 9 vero senarium tribus prætereunt. In sequentibus etiam eadem ratio speculabitur, et semper alternatim, nunc quidem eadem proportionibus, aliæ differentiæ sunt, nunc autem, ordine permutato, iisdem differentiis aliæ proportionibus. Semperque in quibus differunt, secundum naturalis numeri ordines tetragoni et parte altera longiores sese superabunt, tantum quod geminatis summulis naturalis numeri fit progressio. Quod mirum videri non debet, nos enim ipsas summas tetragonorum et parte altera longiorum geminamus ad primas secundasque proportionibus.



Eadem quoque differentiæ, mirabilem in modum a toto per sequentes partes, et per easdem unitates quibus superius creverunt, progrediuntur. Namque inter unum et duo tantum unitas intercedit, quæ unitati cui æqualis est totum est, binarii vero, medietas. Eodem modo inter 2 et 4 tantum duo sunt, qui binarii totum sunt, quaternarii medietas. Inter quaternarium vero et senarium iidem duo sunt, ad quaternarium medietas, ad senarium pars tertia. Tres vero qui sequuntur, qui inter 6 et 9 constituti sunt medii, sunt quidem senarii dimidium, pars vero tertia novennarii. Et rursum ternarius, qui novennarii tertia pars est, duodenarii quarta est, et ad eundem modum usque in finem descriptionis, geminatis hujusmodi partibus, sicut ipsa quoque summarum comparatio geminata est, æquas partium progressionem aspiciat.

CAPUT XXXVIII.

Probatio, quadratos ejusdem esse naturæ.

Illud autem apertissimum signum est, omnes tetragonos imparibus esse cognatos, quod in omni dispositione ab uno, vel in duplicibus, vel in triplicibus talis naturæ ordo conseritur, ut nunquam nisi secundum imparem locum tetragonus inveniatur. Disponamus enim in ordinem numeros, primo quidem duplos, deinde triplos.

1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Si igitur in utrisque versibus primos aspicias, singulos quos invenis, quoniam tetragoni sunt, in impari loco sunt constituti, quoniam primi sunt. Si vero tertium locum repereris, 4 et 9 notabis, quorum hic a duobus proficiscitur, illum ternarius creat, qui sunt loco impari constituti. Quintum deinde si videas locum, 16 et 81 respicies, sed unus a quaternario nascitur, alterum novenarius creat. Et si nonum locum rursus aspicias, tetragonos pernotabis 256, 6561, quorum superior sit a 16, inferior vero ab 81. Idem, si in infinitum facere libeat, indiscrepanter incurrit.

CAPUT XXXIX.

Cubos ejusdem participare substantiæ quod ab imparibus nascantur.

Ipsi vero cubi, qui quanquam tribus intervallis sublatis sunt, tamen propter æqualem multiplicationem participant immutabilia substantiæ, ejusdemque naturæ sunt socii, non aliorum quam imparium coaccervatione produuntur, nunquam vero parium. Nam si omnes ab unitate impares disponantur, juncti figuræ cubicas explicabunt.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

In his igitur qui primus est potestate et virtute primum cubum faciet. Juncti vero duo qui sequuntur, ternarius scilicet et quinarius, secundum efficiunt cubum, qui est octonarius. Juncti autem 3 qui sequuntur, septenarius novenariusque et 11 cubum faciunt, qui 27 numero continetur, qui est tertius. Et sequentes quatuor, quartum, et qui sequuntur 5, quintum, et ad eundem modum quotus quisque cubus efficitur, tot conjunctione impares apponuntur. Hoc autem diligentius subjecta descriptio docet:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	8		27			64			
primus ab uno	secundus a bis duobus bis		tertius a ter tribus ter			quartus a quater quatuor quater			

CAPUT XL.

De proportionalitatibus.

Et de his quidem sufficienter dictum est. Nunc res admonet, quædam de proportionibus dispartantes, quæ nobis vel ad musicas speculationes, vel ad astronomicas subtilitates, vel ad geometricæ considerationis vim, vel etiam ad veterum lectionum intelligentiam prodesse possint, arithmetica introductione commodissime terminare. Est igitur proportionalitas, duarum vel trium vel quotlibet proportionum, assumptio ad unum atque collectio. Ut autem communiter definiamus: Proportionalitas est duarum vel plurium proportionum similis habitudo, etiamsi non eisdem quantitibus et differentiis constitutæ sint. Differentia vero est, inter numeros quantitas. Proportio est duorum terminorum ad se invicem quædam habitudo, et quasi quodammodo continentia. Quorum com-

A positio quod efficit, proportionale e-t. Ex junctis enim proportionibus proportionalitas fit. In tribus autem terminis minima proportionalitas invenitur. Fit etiam in pluribus, sed longior, ut binarius ad unum, quoniam duo sunt termini, duplam obtinet proportionem, sin vero quatuor contra 2 compares, et hic quoque dupla proportio est, quos tres terminos si continue consideres, ex duabus proportionibus fit proportionalitas. Et est proportionalitas, unum ad duo, et duo ad quatuor. Est enim proportionalitas, ut dictum est, collectio proportionum in unumque redactio. Fit etiam et in longioribus. Nam si quatuor illis octo velis adungere, et his 16, et his 32, et deinceps duplos qui sequuntur, fit in omnibus dupla proportionalitas ex proportionibus duplis. Igitur quoties unus atque idem terminus, ita duobus ceterum se terminis communicat, ut ad unum dux sit, ad alium comes, hæc proportionalitas continua vocatur, ut unus, duo, quatuor. Est enim æqualitas in his proportionibus, et quemadmodum sunt 4 ad 2, sic sunt duo ad unum. Et rursus, quemadmodum unus ad duo, sic duo ad quatuor. Et secundum quantitatem quoque numeri, eodem modo est. Quantum enim tres superant binarium, tantum binarius unitatem, et quantum unus a duobus minor est, tantum binarius a ternario superatur. Sin vero alius ad unum referitur terminus, alius vero ad alium, necesse est habitudinem disjunctam vocari. Ut ad æqualitatem quidem proportionis sunt, 1, 2, 4, 8; sic enim sunt quemadmodum duo ad unum, si octo ad quatuor, et conversim, quemadmodum unus ad duo, sic quatuor ad octo. Et permutatim, quemadmodum quatuor ad unum, sic octo ad binarium. Secundum quantitatem vero numeri, ut sunt 1, 2, 3, 4, quantum enim unus a duobus vincitur, tantum ternarius a quaternario superatur. Et quantum duo unum vincunt, tanto ternarius quaternarius transit. Permixtim etiam, quanto unus tribus minor est, tanto binarius quaternario, vel quanto ternarius unitatem superat tanto binarium transgreditur quaternarius.

CAPUT XLI.

Quæ apud antiquos proportionalitas fuerit et quas posteri addiderint.

Confessæ quidem et apud antiquiores notæ, quæque ad Pythagoræ vel Platonis vel Aristotelis scientiam pervenerunt, hæc tres medietates sunt arithmetica, geometrica, harmonica. Post quas proportionum habitudines, tres aliæ sunt quæ sine nomine quidem feruntur. Vocantur autem quarta, quinta, vel sexta, quæ superius dictis oppositæ sunt. At vero posteri propter denarii numeri perfectionem, quod erat Pythagoræ complacitus, medietates alias quatuor addiderunt, ut in his proportionalitatibus, denariæ quantitatis corpus efficerent. Secundum quem numerum et priores quinque habitudines comparationesque descriptæ sunt, ubi quinque majoribus proportionibus, quos vocavimus duces minores aptavimus alios terminos quos comites diximus. Inde etiam in Aristotelica atque Archytæ prioribus 10, prædicamentorum

descriptione, Pythagoricum denarium manifestum est inveniri. Quandoquidem et Plato studiosissimus Pythagoræ secundum eam disputationem dividit, et Archytas Pythagoricus ante Aristotelem (licet quibusdam sit ambiguum) decem hæc prædicamenta constituit. Inde etiam 10 membrorum particula, inde alia permulta quæ omnia persequi non est necessè.

CAPUT XLII.

Quod primum de ea quæ vocatur arithmetica proportionalitate dicendum est.

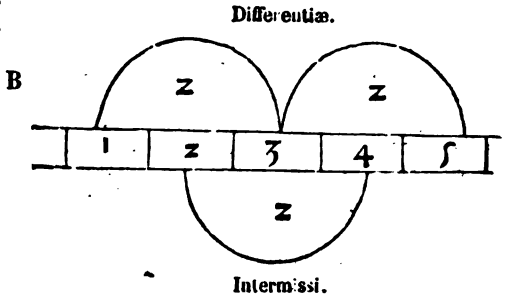
Nunc vero de proportionalitatibus, deque mediocritatibus dicendum est. Et primum quidem de ea mediocritate tractabimus, quæ secundum quantitatis æqualitatem, neglecta proportionis paritate, constitutorum terminorum habitudines servat. In his autem quantitibus mediocritas ista versatur, inque his speculanda est, in quibus a seipsis termini differunt. Quid autem esset differentia terminorum superius definitum est. Ilanc autem esse arithmeticam mediocritatem, numerorum ipsa ratio declarabit, quoniam ejus proportio in numeri quantitate consistit. Quæ igitur causa est, hujusmodi terminorum habitudinem, id est arithmetice, cunctis aliis proportionalitatibus antepone? Primum quod hanc nobis in principio ipsa numerorum natura, et vis naturalis quantitatis opponit. Hujusmodi enim proportiones quæque ad terminorum differentias pertinent, ut paulo post demonstrabitur, in naturalis primum numeri dispositione cognoscimus. Deinde, quod superiore libro disputantibus nobis apparuit, arithmeticam vim geometrica atque musica esse antiquiorem, et quod illata, has simul inferret, sublata veroperimeret. Quare ordine disputatio progreditur, si ab ea prius inchoandum sit mediocritate, quæ in numeri differentia, non in proportionis speculatione versatur.

CAPUT XLIII.

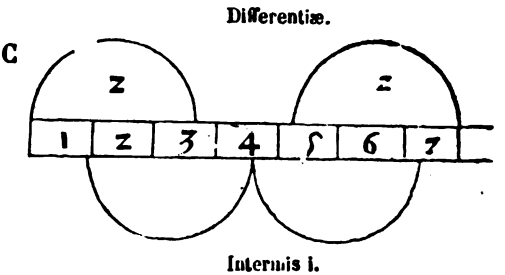
De arithmetica mediocritate ejusque proprietatibus.

Arithmetice mediocritatem vocamus, quoties vel tribus vel quolibet terminis positi, æqualis atque eadem differentia inter omnes dispositos terminos invenitur. In qua, neglecta proportionis æqualitate, terminorum tantum differentiarumque speculatio custoditur, ut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. In hac enim naturalis numeri dispositione, si quis continuatim differentias terminorum curet aspicere, secundum arithmetice mediocritatem, æqua terminorum inter se discrepantia est. Æquales enim sunt differentiæ, sed eadem proportio atque habitudo non est. Si igitur in tribus terminis consideratio sit, continua proportionalitas dicitur. Sin vero hic alius dux et alius comes, illic vero utrique sint alii, vocabitur disjuncta mediocritas. Si igitur in tribus tantum terminis secundum continuam mediocritatem conspexeris, vel in quatuor, vel in quolibet aliis secundum disjunctam, easdem semper differentias terminorum videbis, tantum solis proportionibus permutatis. Id si in uno quis noverit, reliqua eum ratio non latebit. Sit continua mediocritas 1, 2, 3. Illic unus a duobus, et duo a tribus, solis tantum singulis distant, et sunt eadem dif-

ferentiæ, proportionibus vero aliis. Namque duo ad unum duplus est, tres ad duo, sesquialter, et in cæteris idem videbis. Sin autem permiscens et aliquos præteriens eligas, et in his aliquam speculationem ponas, idem poterit evenire. Nam si æquales terminos intermittas, et sese in priore dispositione prætereant, si singulos intermittas, solius binarii notabitur differentia, sin vero duo prætereas, ternarii, si tres, quaternarii, et ad eundem modum uno plus quam intermiseris, erit illa quam quærimus differentia terminorum. Namque si in tribus terminis singulis relinquantur, binarius semper intererit.

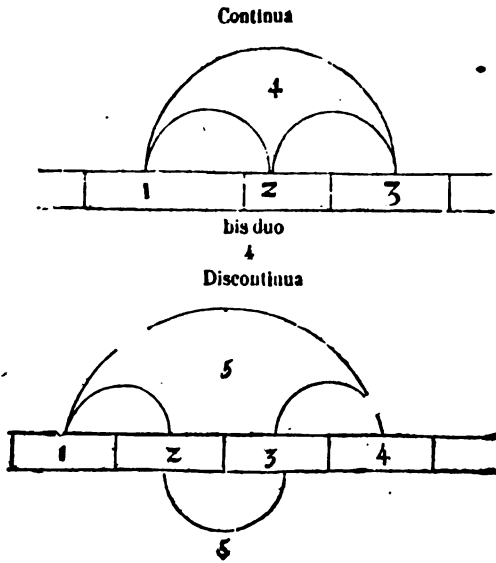


Videsne ut cum superius in naturalis numeri dispositione se termini singulis prætererent, prætermisissis duobus et 4, unus ad tres, et 3 ad quinarium comparati, binarium solum in differentia reti veri. Nec non etiam in disjuncta eadem versabitur observatio.

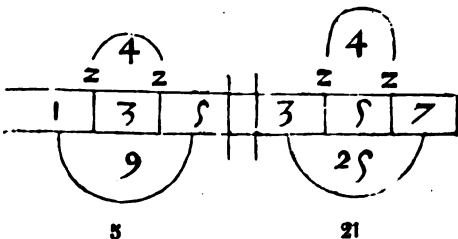


Talibus igitur vestigiis insistentem, nullus ab eadem similitudine error abducat. Namque si duos intermittas, ternarius differentiam continebit, si tres, quaternarius, si quatuor, quinarium, æque in continuis proportionibus atque disjunctis. Qualitas autem proportionis eadem non erit, quavis sint æqui termini differentiis distributi. Quod si conversim ponantur, ut non eisdem differentiis eadem qualitas proportionis eveniat, geometrica talis proportionalitas, non arithmetica nominatur. Est autem proprium hujus mediocritatis, quod si in tribus terminis speculatio sit, compositis extremitatibus, illa summa quæ inter extremitates est, non loco tantum, verum etiam sit quantitate mediocritas. Ut si ponantur 1, 2, 3, unus et tres quatuor reddunt. Duo vero qui medius inter utrosque est, quaternarii mediocritas invenitur. Quod si bis mediocritatem ducas, æquus erit extremitatibus. Bis enim duo, quatuor creant. Sin vero disjuncta sit, quod sit ex utrisque extremitatibus compositis, hoc ex duabus mediocritatibus redditur. Si enim sunt 1, 2, 3, 4, unus et quatuor quinarium

reant, duo et tres medii in eundem rursus quinarium surgunt.



Est illi hoc quoque solida proprietate conjunctum, quod quemadmodum sunt omnes termini hujusmodi dispositionis ad seipsos, ita sunt differentiae ad differentias constitutae. Namque omnis terminus sibi ipsi aequalis est, et differentiae differentis sunt aequales. Illud quoque subtilius, quod multi hujus disciplinae periti, nisi Nicomachus nunquam antea perspexerunt, quod in omni dispositione, vel continua, vel disjuncta, quod continetur sub duabus extremitatibus, minus est eo numero qui ex medietate conficitur, tantum quantum possunt duae sub se differentiae continere, quae inter ipsos sunt terminos constitutae. Ponamus enim tres terminos hujusmodi 3, 5, 7. Si igitur tres septies augeantur, in 21 numerum cadunt. Quod si medium terminum, id est 5, in semetipsum multiplicaveris, quinquies quinque faciunt 25. Et hic numerus ab eo quem extremitates colligunt, quaternario major est, quem scilicet differentiae conficiunt. Inter 3 enim et 5 et 7 binii intersunt quos si in sese multiplices 4 reddunt, bis enim duo, quatuor fiunt. Recte igitur dictum est, in hac hujusmodi dispositione quod continetur sub extremitatibus, minus esse illo numero qui fit ex medietate, tantum quantum differentiae in se multiplicatae restituunt.



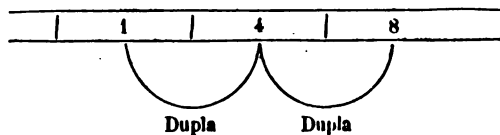
Quartum vero proprium hujusmodi dispositionis notatur, quod antiquiores quoque habuere notissimum, quod in hac proportionalitate vel medietate, in minoribus terminis majores proportiones, in majoribus

minores comparationes necesse est inveniri. Namque in dispositione hac 1, 2, 3, minores sunt termini 1 et 2, majores 2 et 3, et 2 ad unum duplus est, 3 vero ad 2 sesquialter, sed major est proportio dupli quam sesquialtera. In harmonica autem medietate, contrario evenire contingit. In minoribus enim terminis minores proportiones, in majoribus major proportionis quantitas custoditur. Harum vero medietatum, id est arithmeticae atque harmonicae, geometrica proportionalitas media esse notata est, quae vel in majoribus vel in minoribus terminis, aequas numerorum qualitates in proportionalitate custodit. Inter majus vero et minus, aequalitas loco ponitur medietatis. Et de arithmetica quidem medietate satis dictum est.

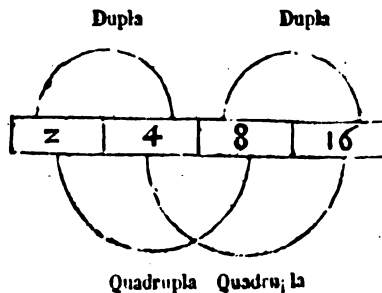
CAPUT XLIV

B De geometrica medietate ejusque proprietatibus.

Nunc vero quae hanc sequitur geometrica medietas expediatur, quae sola vel maxime proportionalitas appellari potest, propterea quod in ea eisdem proportionibus terminorum, vel in majoribus vel in minoribus speculatio ponitur. Hic enim aequa semper proportio custoditur, numeri quantitas multitudoque negligitur contrarie quam in arithmetica medietate, ut sunt 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Vel in tripla proportione 1, 3, 9, 27, 81. Vel si quadrupla, vel si quincupla, vel si in quamlibet multiplicatam numerorum sit constituta distensio. In his enim quotlibet terminos sumpseris, explebunt geometricam medietatem, quemadmodum ante prior ad sequentem, ita sequenti ad alium. Et rursus, si permixte facias, idem erit. Si enim ponantur tres termini 2, 4 et 8, quemadmodum sunt 8 ad 4, ita 4 ad 2. Atque hoc si convertas, quemadmodum sunt 2 ad 4, ita erunt 4 ad 8.



Vel si in quatuor terminis, ut sunt 2 et 4, 8 et 16, quemadmodum est primus ad tertium, id est 2 ad 8 sic erit secundus ad quartum, id est 4 ad 16. Utraque enim proportio quadrupla est. Et conversim, quemadmodum quartus est ad secundum, ita tertius notator ad primum. Hoc vero etiam disjuncte licet. Nam quemadmodum est primus ad secundum, id est 2 ad 4, sic tertius ad quartum, id est 8 ad 16; et conversim, quemadmodum secundus ad primum, id est 4 ad 2, ita quartus ad tertium, id est 16 ad 8, idque in omnibus rata consideratione perspicies.



Uabet autem proprium hujusmodi medietas, quod in omni dispositione secundum hanc proportionalitatem terminorum differentia in eadem proportione contra se sunt, qua fuerint ipsi termini quorum sunt ipsae differentiae. Sive enim dupli contra se sint termini, dupla erunt etiam differentiae sive tripli triplae, sive secundum quamlibet multipliciter, eadem in differentis multipliciter erit, quam prima consideratio invenit in terminis, ut subjecta descriptio monet.

Differentiae duplae.

1	2	4	8	16	32	64	128	
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Termini dupli.

Nulli igitur dubium esse potest, quod cum omnes termini dupli sint; ita differentiae quoque eorum terminorum duplae esse videantur, ut uno minus termino in differentiis, omnes pene dispositos subter terminos quorum sunt ipsae differentiae, superior ordo reddiderit. Est etiam aliud proprium, quod omnis ad minorem major terminus comparatus ipsum minorem retinet differentiam. Namque binarius ad unitatem ipsa unitate differt, et quaternarius binario ipso binario, et octonarius quaternario ipso quaternario, et deinceps majores alii ipsis minoribus ab eisdem ipsis differunt quos numerositate praetereunt. Et hoc quidem in duplici proportione cadit. Sin vero sint triplices proportiones, major terminus a minore termino, duplicato minore termino differt. Ut si sint 1, 3, 9, tres ab uno, binario differunt, in quem unitas, id est minor terminus duplicatus exundat, et 9 a tribus senario differunt, quem ternarius duplicatus educit. Et in aliis cunctis ejusmodi ratio reperitur. Si vero quadruplices sint, triplicato minore termino, major terminus a minore distabit. Et si quincupli, quadruplicato, et si sexcupli, quincuplicato, et una minus multiplicatione quam est ipsa minorum ad majores comparatio terminorum, minorem numerus major exsuperat.

Differentiae duplae.

1	2	4	8	16	32	64	128	
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Termini dupli.

Differentiae triplae.

2	6	18	54	162	486	1458	
1	3	9	27	81	243	729	2187

Termini tripli.

Differentiae quadruplae.

5	12	48	192	768	3072	12288	
1	4	16	64	256	1024	4096	16384

Termini quadrupli.

Haec autem proportionalitas et in aliis omnibus, vel superparticularibus, vel superpartientibus, invenitur, hujusmodi proprietate in omnibus conservata, ut in continua proportione, quod fit sub extremitatibus si tres fuerint termini, hoc a medietate multiplicata consurgat. Si enim sint 2, 4, 8, quod fit ex bis 8, idem fit ex quater 4. Vel si sit in quatuor terminis disjuncta proportio, quod fit sub utrisque extremitatibus, id duarum medietatum multiplicatione con-

creseat. Ut si sint 2, 4, 8, 16, quod fit ex bis 16, id ex quater 8 reddatur. Exemplar autem nobis maximum certissimumque sit illud ubi ex aequalitate diximus omnes inaequalitatis species fundi. Illic enim, in omnibus vel multiplicibus, vel superpartientibus, vel superparticularibus, vel in caeteris conjunctis, geometrica proportionalitas custoditur, has omnes proprietates quas supradiximus continens. Quarta vero est proprietas hujusce medietatis, quod vel in majoribus vel minoribus terminis aequales semper proportionales sunt. Namque si ponantur 2, 4, 8, 16, 32, 64, inter hos omnes dupla proportio est. Apparet etiam haec proportionalitas in binis proportionibus, ab unitate alternatim parte altera longioribus quadrati-que dispositis, a prima multipliciter habitu. Id est a duplici per cunctas superparticulares habitudines proportionalesque discurrens, quod subjecta descriptione signatur est.

Tetragonus	1	
Parte altera longior	2	Dupla
Tetragonus	4	Dupla
Parte altera longior	6	Sesquialtera
Tetragonus	9	Sesquialtera
Parte altera longior	12	Sesquitertia
Tetragonus	16	Sesquitertia
Parte altera longior	21	Sesquiquarta
Tetragonus	25	Sesquiquarta
Parte altera longior	30	Sesquiquinta
Tetragonus	36	Sesquiquinta
Parte altera longior	42	Sesquisexta
Tetragonus	49	Sesquisexta

CAPUT XLV.

Quae medietates, quibus rerum publicarum status comparentur.

Atque ideo arithmetica quidem ei reipublicae comparatur quae paucis regitur, idcirco quod in minoribus ejus terminis major proportio sit. Musicam vero medietatem optimatam dicunt esse rempublicam, ideo quod in majoribus terminis major proportionalitas invenitur. Geometrica medietas, popularis quodammodo et ex aequalitate civitatis est. Namque vel in majoribus, vel in minoribus, aequali omnium proportionalitate componitur, et est inter omnes paritas quaedam medietatis aequum jus in proportionibus conservantis.

CAPUT XLVI.

Quod superficies una tantum in proportionalitatibus medietate jungantur, solidi vero numeri duabus medietatibus in medio collocantur

Post haec igitur tempus est ut expediamus nunc quiddam nimis utile in Platonica quadam disputatione, quae in Timaei cosmopeia haud facili cuiquam vel penetrabili ratione versatur. Omnes enim planae figurae quae nulla altitudine crescunt, una tantum medietate geometrica continuantur, alia quae jungat non potest inveniri; unde duo tantum in his intervalla sunt constituta, a primo scilicet ad medium, et a medio ad tertium. Si vero fuerint cubi, duas tantum habebunt medietates, ubi tertia inveniri non poterit,

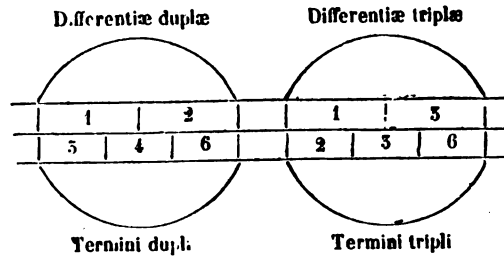
secundum geometricam scilicet proportionem. Unde A
formæ solidæ tria intervalla dicuntur habere. Est
enim unum intervallum a primo ad secundum, et a
secundo ad tertium, et a tertio ad quartum, quæ est
scilicet postréma distantia. Rectæ igitur et planæ fi-
guræ duobus intervallis et solidæ tribus contineri di-
cuntur. Sint enim duo tetragoni, 4 scilicet et 9, ho-
rum igitur unus tantum medius in eadem propor-
tione constitui potest. Namque senarius ad 4 sesqui-
alter est, et 9 ad senarium eodem modo sesquialter.
Hoc autem idcirco evenit, quod singula latera, sin-
gulorum tetragonorum efficiunt senariam medietatem.
Namque quaternarii tetragoni latus binarius est,
novenarii ternarius; hi ergo multiplicati senarium
perfecerunt. Bis enim tres senarius est. Et quotiens-
cunque, datis duobus tetragonis, eorum medietatem
volumus invenire, latera eorum multiplicanda sunt,
et qui ex his procreabuntur, medietas est. Si autem
cubi sint, ut 8 et 27, duæ tantum inter hos eadem
proportionem medietates constitui queunt, 12 scilicet
et 18, namque 12 ad 8, et 18 ad 27, sesquialtera tan-
tum proportionem junguntur. In his quoque eadem la-
terum ratio est. Namque ex uno cubo qui propin-
quior est, una medietas duo latera colligit; ex al-
ternatim vero posito, unum. In alia quoque medietate
idem est. Ponantur enim duo cubi, et in medio eo-
rum duæ medietates quas superius diximus, 8, 12,
18, 27, octonarii igitur latus est binarius, bis enim
bini bis octonarium fecerunt. Ternarius vero 27 cu-
bi latus est. Ter enim tres ter 27 restitunt. Medietas
igitur quæ juxta octonarium est, id est 12, muta-
tur duo latera ex propinquo sibi octonario, et aliud
unum latus ex altrinsecus posito 27 cubo. Bis enim
bini ter 12 pandunt. Et 18 eadem ratione duo latera
a propinquo sibi 27 cubo colligit, et unum ab altrin-
secus posito octonario. Tres enim ter bis 18 conclu-
dunt. Hoc autem universaliter speculandum est, si
tetragonus tetragonum multiplicet, sine dubio tetra-
gonus provenit. Sin vero parte altera longior tetra-
gonum multiplicet, vel tetragonus parte altera lon-
giorem nunquam tetragonus, sed semper antelongior
crescit. Rursus si cubus cubum multiplicaverit, cubi
forma conficitur. Si vero parte altera longior cubum,
vel cubus parte altera longiorem, nunquam cubus
procreabitur, hoc scilicet secundum similitudinem
paris atque imparis. Par enim parem si multiplicet,
semper par nascitur, et impar imparem si multipli-
cet, impar continuo procreatur. Si vero impar parem,
vel si par imparem multiplicet, par semper exoritur.
Hoc autem facilius cognoscitur ex lectione Platonis
in libris de Republica, eo loco qui nuptialis dicitur,
quem ex persona Musarum philosophus introducit.
Sed nunc ad tertiam medietatem redeundum est.

CAPUT XLVII.

De harmonica medietate ejusque proprietatibus.

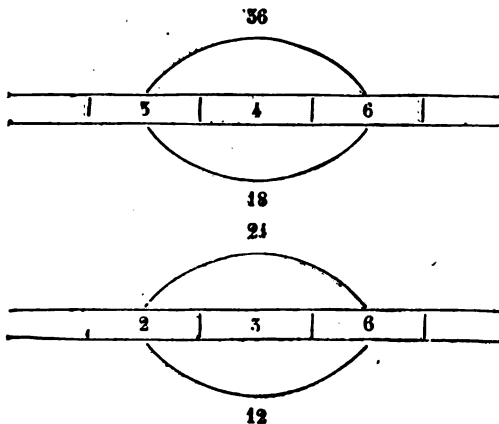
Harmonica autem medietas est quæ neque eisdem
differentiis, nec æquis proportionibus constituitur,
sed illa in qua quemadmodum maximus terminus ad
parvissimum terminum ponitur; sic differentia ma-

ximi et medii contra differentiam medii atque par-
vissimi comparatur. Ut si sint 3, 4, 6, vel si 2, 3, 6.
Senarius enim quaternarium sua tertia parte superat,
id est duobus; quaternarius vero ternarium sua quarta
parte superat, id est uno; et senarius ternarium sua
medietate, id est tribus, ternarius vero binarium sua
parte tertia, id est unitate transcendit. Quare in his
neque eadem proportio terminorum est, neque sunt
eodem differentie. Est autem quemadmodum maxi-
mus terminus ad parvissimum terminum, sic diffe-
rentia maximi et medii ad differentiam medii atque
postremi. Namque in hac proportione, quæ est, 3, 4,
6, major terminus, id est senarius ad parvissimum
terminum ternarium duplus est, et differentia ma-
ximi et medii, id est senarii et quaternarii, duo sci-
licet ad differentiam medii et ultimi, id est quater-
narii atque ternarii, quæ est unitas, dupla perspici-
tur. Sed hoc quoque subjecta descriptione mor-
stratur:



Habet autem proprietatem, quemadmodum dictum
est, contrariam arithmetice medietati. In illa enim,
in minoribus terminis major erat proportio, in ma-
joribus minor; in hac vero, in majoribus quidem
terminis major est proportio, in minoribus vero mi-
nor. Namque in hac dispositione 5, 4, 6, tres ad
quatuor comparati sesquiterciam habitudinem, sex
vero ad quatuor sesquialteram reddunt; sed major
est proportio sesquialtera a sesquitercia, tantum quan-
tum pars tertia medietate transcenditur. Juste igitur
medietas quædam geometrica proprieque esse pro-
portionalitas judicatur, scilicet inter eam ubi in ma-
joribus terminis minor est proportio, et minoribus
major, et inter eam ubi in majoribus major est, in
minoribus minor. Illa est enim vere proportionalitas
quæ, medietatis quodammodo locum obtinens, et
in majoribus et in minoribus, æqualibus proportio-
num comparationibus continetur. Hoc quoque signum
est, duarum extremitatum mediam esse quodammodo
geometricam proportionem. Namque in arithmetica
proportionem, medius terminus eadem sua parte, et
minorem præcedit et a majore præceditur, sed alia
parte minoris, alia vero parte majoris. Sit enim
arithmetica dispositio 2, 3, 4. Ternarius igitur nu-
merus binarium tertia sua parte præcedit, id est uno,
et a quaternario tertia sua parte præceditur, id est
uno. At vero ternarius non eadem parte minoris mi-
norem vincit, vel majoris a majore superatur. Nam-
que minorem, id est binarium, uno superat, id est
ipsius medietate binarii, a quaternario vero uno re-
linquitur, quæ pars quaternarii quarta est. Recte

igitur dictum est medium terminum in hujusmodi medietate eadem sui parte et minorem vincere et a majore superari, sed non eisdem partibus, vel minoris minorem transgredi, vel majoris a majore transcendendi. Contrarie harmonica medietas proportionem habet. Namque non eadem parte sua, medius terminus in hac proportione vel minorem vincit, vel a majore superatur, sed eadem parte minoris minorem superat, qua parte majoris a majore superatur. In hac enim dispositione harmonica, quæ est 2, 3, 6, ternarius binarium tertia sui parte vincit, idem ternarius a senario tota sui quantitate superatur, id est tribus. Idemque ipse ternarius, medietate minoris vincit minorem, id est uno, et medietate majoris a majore termino vincitur, id est tribus. Senarii enim medietas ternarius est. In geometrica vero medietate, neque eisdem suis partibus medius vel vincit minorem, vel a majore vincitur, neque eadem parte vel minoris minorem superat, vel majoris a majore relinquitur, sed qua parte sua medius terminus minorem superat, eadem parte sua major terminus medium vincit. Quod est ut medietas atque extremitas, æqualibus medietatem et extremitatem reliquam suis partibus supervadant. In hac enim dispositione, quæ est 4, 6, 9, tertia sui parte medius senarius quaternarium superat, id est duobus, et tertia sui parte rursus novenarius senarium vincit, id est tribus. Habet autem aliam proprietatem harmonica medietas, ut cum duas extremitates in unum redactas, medietas multiplicaverit, dupla quantitas colligitur, quam si se multiplicent duæ extremitates. Sint enim hi termini 3, 4, 6. Si igitur ternarium et senarium jungas, novenarium facies, qui per quaternarium ductus 36 efficit. Quod si se ipsæ extremitates multiplicent, et fiant tres sexies, 18 conficiunt, quod est prioris summe dimidium.

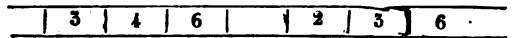


CAPUT XLVIII.

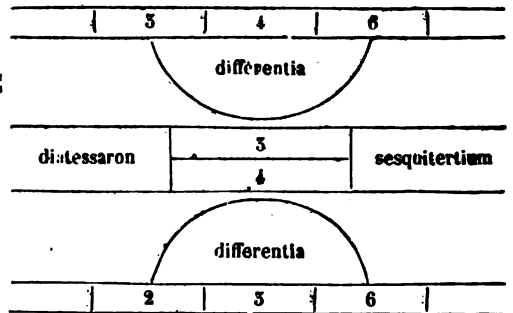
Quare dicta sit harmonica medietas ea quæ dig sta est.

Considerandum forsitan videatur cur hanc harmonicam medietatem vocemus. Cujus hæc ratio est, quoniam arithmetica dispositio æquas tantum per differentias dividit quantitates, geometrica vero terminus æqua proportione conjungit. At vero harmonica ad a liquid quodammodo relata consideratione,

A neque solum in terminis speculationem proportionis habet, neque solum in differentiis, sed in utrisque communiter. Quærit enim ut quemadmodum sunt ad se extremi termini, sic majoris ad medium differentia, contra differentiam medietatis ad ultimum. Ad aliquid autem, considerationem harmonice proprie esse, in primi libri rerum omnium divisione monstravimus. Ipsarum quoque musicarum consonantiarum quas symphonicas nominant proportionem, in hac pene sola medietate frequenter invenias. Namque symphonia diatessaron, quæ princeps est et quodammodo vim obtinens elementi, constituta scilicet in epitrita proportione, ut est quaternarius ad ternarium, in ejusmodi harmonice medietatibus invenitur. Sint enim ejusmodi harmonice medietatis termini quorum extremi dupli sint, et rursus alia hujusmodi dispositio quorum extremi tripli.

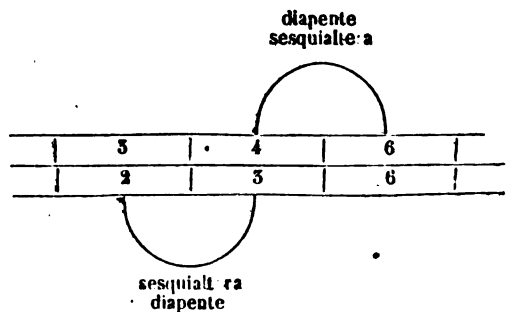


Senarius igitur ad ternarium duplus est. Idem autem in alia dispositione, senarius ad binarium triplus. Horum igitur si differentias colligamus et ad se invicem comparemus, epitrita proportio colligitur, unde diatessaron symphonia resonabit. Inter 3 enim et 6 ternarius est, et inter binarium et senarium quaternarius, qui, sibi met comparati, sesquiterciam efficiunt proportionem.

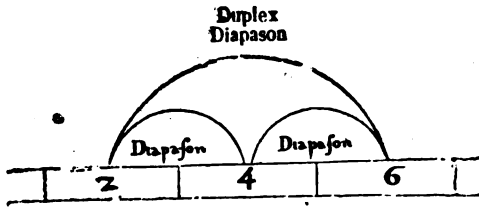


In eadem quoque medietate et diapente symphonia componitur, quam sesquialtera habitudo restituit. Nam in utrisque dispositionibus his quæ subjectæ sunt, in duplici senarius ad quaternarium sesquialter est, in triplici ternarius ad binarium, ex quibus utrisque, diapente symphonia conjungitur.

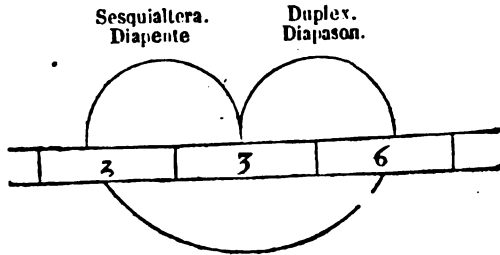
D



Post hanc autem diapason consonantia, quæ fit ex duplici, ut est in subjecta formula.



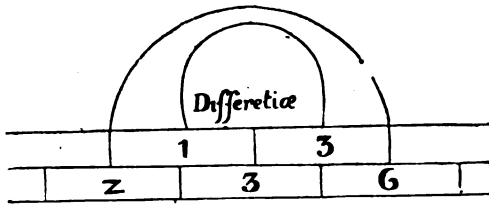
In triplici quoque dispositione, simul diapente et diapason symphonia componitur, s rrvans sesquialteram et duplicem rationem, quod subjecta descriptio docet.



Triplex Diapente et diapason.

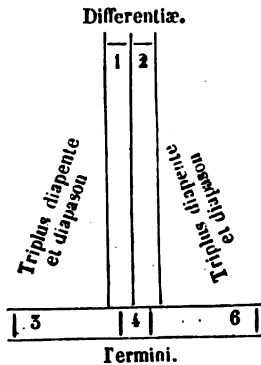
Et quoniam triplus duas continet consonantias, diapente, scilicet, et diapason, in bujus triplicis positione in differentiis eundem rursus triplum reperimus, secundum subter descriptum modum.

Triplus diapente et diapason.



Termini.

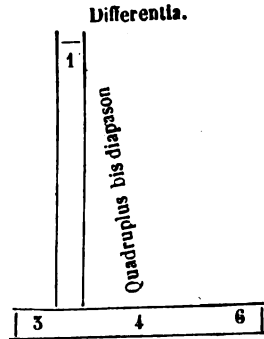
In dupla vero dispositione, major terminus ad medij termini contra se differentiam, triplus est, et rursus minor terminus ad medij contra minorem terminum comparati differentiam, triplus est.



Termini.

Illa autem maxima symphonia quæ vocatur bis diapason, velut bis duplum, quoniam diapason symphonia ex duplici proportione colligitur, huic se juncturæ harmonicæ medietatis interserit. Nam in duplici proportione, medius terminus ad minoris sui que differentiam quadruplus invenitur.

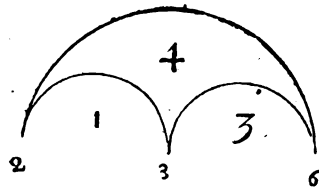
A



Termini.

In triplicibus quoque extremitatibus, major differentia ad minorem differentiam quadrupla est, et bis diapason symphoniam emittit. Namque in dispositione 2, 3, 6, extremorum differentia est, id est senarii et binarii, 4; minor vero differentia, id est ternarii et binarii, unus; 4 autem uno quadruplus major est relatione, quæ comparatio bis diapason consonantiam tenet.

Quadruplus bis diapason.

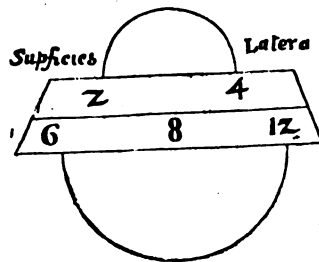


CAPUT XLIX.

De geometrica harmonia.

Vocant autem quidam harmonicam hujusmodi medietatem, idcirco quod semper hæc proportionalitas geometricæ harmoniæ cognata est, harmonicam autem geometricam, cubum dicunt. Ita enim ex longitudine in latitudinem distentus est, et in altitudinis cumulum crevit, ut ex æqualibus proficiscens, ad æqualia perveniens, æqualiter totus sibi conveniens creverit. Hæc autem medietas, in omnibus cubis quæ est geometrica harmonia perspicitur. Omnis enim cubus habet latera 12, angulos 8, superficies 6. Hic autem ordo et dispositio harmonica est. Disponantur enim 6, 8, 12; hic ergo quemadmodum est major terminus ad parvissimum, ita differentia majoris et medij ad parvissimum comparatur.

Differentiæ duplæ.



Dupli termini.

Perpensi namque 12 ad sex dupli sunt, differentia vero 12 et octonarii quaternarius est, octonarii vero 6

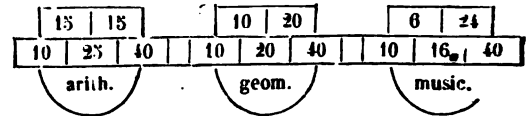
senarii duo, dupla autem ratione distabunt duobus A quatuor comparati. Rursus octonarius, qui medietas e t, alia sua parte minorem præcedit, et alia sua parte a majore præceditur, e-dem autem parte minoris minorem superat qua parte majoris a majore superatur. Rursus si extremitates in unum redigantur et a medietate octonario multiplicentur, duplex erit ab eo numero quem solæ extremitates multiplicatæ perfecterint. Omnes autem in hac dispositione symphonias musicas invenimus. Diatessaron quidem est octo ad sex, quoniam proportio se-quitertia est. At diapente, 12 ad 8, quoniam ea quæ sesquialtera comparatio dicitur, in ea diapente consonantia reperitur. Diapason vero, quæ ex duplici nascitur, ex 12 ad sex compositione producitur. Diapason vero et diapente, quæ triplicis obtinet rationem, sit ab extremitatum differentia, ad differentiam minorem. Namque duodenarii et senarii sex differentia est; minor vero est differentia octonarii et senarii, id est 2. Qui senarius ad binarium triplus est, et diapason simul et diapente consonantia sonant. Illa vero major consonantia quæ est bis diapason, quæ ex quadruplo fit in medii termini, id est octonarii, et ejus differentia comparatione perspicitur, quæ inter octonarium binariumque reperitur. Quare proprie atque convenienter hujusmodi proportionalia, harmonica medietas appellatur.

CAPUT L.

Quemadmodum constitutis altrinsecus duobus terminis, arithmetica, geometrica, et harmonica inter eos medietas alternetur, atque de eorum generationibus.

Nos autem præare debemus, quatenus quemadmodum d. to calamo, extremis foraminibus manentibus musicis mos est, ut medium foramen permutantes, atque aliud aperientes, aliud digitis ocludentes, diversos emittant sonos, vel cum duabus altrinsecus protensis chordis, medii nervi sonum musicus vel astringendo tenuat, vel remittendo gravat, ita quoque datis duobus numeris, nunc quidem arithmetica, nunc vero geometricam, nunc autem harmonica medietatem experiamur inserere, ut rectum propriumque medietatis nomen sit, quod manentibus extremitatibus huc atque illuc ferri permutarique videatur. Poterimus autem hanc in duobus altrinsecus positis terminis, vel paribus vel imparibus permutare, ita ut cum arithmetica ponimus medietatem differentiarum tantum ratio æqualitasque servetur. Cum vero geometricam, rata se proportionum junctura custodiat. Sin autem harmonica fiat differentiarum comparatio, ab terminorum proportionem non discrepet. Et sint quidem primo pares positæ quædam extremitates, inter quas has omnes medietates oporteat internectere, 10 et 40. Prius igitur arithmetica medietas aptetur. Inter hos ergo si 25 posuero, erit mihi arithmetica proportio differentiarum quantitate immutabiliter custodita, in huiusmodi, scilicet

dispositione 10, 25, 40. Vides enim ut quinquenæ sese summulæ quantitate transcendant.



Omnesque proprietates, quas supra diximus in medietate arithmetica convenire ab hac hujusmodi dispositione non reperies alienas. Namque quemadmodum unusquisque eorum terminus ad seipsum est, quoniam sibi æqualis est, ita sunt ad se invicem differentia quoniam sibi sunt æquales, et quanto major terminus medium transit, tanto medius vincit minorem. Et extremitatum aggregatio duplex est medietate, et minorum terminorum proportio major est illa comparatione, quæ inter majores terminos continetur. Et tanto minor est numerus qui fit ex multiplicatis extremitatibus, ab eo qui fit ex multiplicata medietate, quantum eorum differentia multiplicata restitunt. Illud quoque quod medietas eadem sui parte et a majore vincitur, et minorem ipsa supervenit, non eadem autem parte minoris minorem transit, vel majoris a majore relinquitur, quæ omnes scilicet proprietates non alterius nisi arithmetica medietatis sunt. Quod si superius dicta meminerit lector, ita esse indubitanter intelliget. Rursus si inter eosdem 10 et 40 viginti constituam, statim geometrica medietas cum suis proprietatibus cunctis exoritur, arithmetica medietate pereunte. In hac enim dispositione 10, 20, 40, quemadmodum est major ad medium, sic medius ad extremum. Et quod continetur ab extremitatibus, æquum est ei quod a multiplici medietate completur. Differentia quoque eorum in eadem sunt proportionem qua termini. Crementum vero et imminutio proportionum secundum terminos nulla est, sed majorum terminorum proportio a minorum terminorum proportionem non discrepat. Si vero harmonica medietatem conjungere velim, 16 mihi numerus inter extremitates utrasque ponendus est, ut sit hoc modo 10, 16, 40. Nunc igitur licet in hujusmodi dispositione omnes harmonicas proprietates agnoscere, qua enim maximus ad parvissimum terminus proportionem jungitur, eadem proportionem differentia ad se invicem comparantur. Et quibus partibus majoris a majore medius vincitur, eisdem partibus minoris præterit minorem. Suis vero non eisdem vel a majore vincitur, vel transit minorem. Et in majoribus terminis major est proportio, in minoribus minor. Et si in unum extremitates redigantur, et medietatis quantitate concrescant, duplex inde conficitur numerus ab eo qui ex solis multiplicatis extremitatibus procreatur. Atque hoc quidem in terminis paribus constitutum est. At vero si impares proponantur, ut sunt 5 et 45, aptatus medius 25, arithmetica proportionem medietatemque constituit. Nam si sint 5, 25, 45, eadem sese numerorum quantitate termini transgredientur, et omnis superius dicta proprietas arithmetica medietatis in his terminis custoditur. Sed si 15 numerum medium ponam, ut

sint 5, 15, 45, in geometricam medietatem termini relabuntur, æqualibus terminorum ad se invicem proportionibus custoditis. Novem vero si inter utroque terminos ponam, ut sint 5, 9, 4, 5, sit harmonica medietas, ut qua summa maximus numerus parvissimum præcedit, eadem major differentia minorem differentiam vincat. Qua vero disciplina hujusmodi medietates reperiri possimus, expediendum est. Datis duobus terminis, si arithmetica medietatem constituere oportebit, utraque est extremitas conjungenda, quodque ex ea copulatione colligitur dividendum, isque numerus qui ex divisione redactus est, arithmetica medietatem inter extremitates locatus efficiet: ut 10 et 40 si junxero efficiunt 50, quos si dividam, 25 redduntur. Hic erit medius terminus secundum arithmetica proportionem. Vel si illum numerum quo major minorem superat divides, eumque minori superponas, quodque inde concrescit medium ponas, arithmetica medietas informatur. Nam 40 denarium tricenario superat; quem si divides 15 sunt; hunc si minori, id est denario, superposueris, 20 et 5 nascentur; quem si medium constituas, arithmetica medietatis ordo formatur. Geometricam vero si rationem vestiges, ejus numeri qui sub utrisque extremitatibus continetur, tetragonum latus inquire, et hunc medium pone. Nam sub 40 et denario numero 400 continentur. Si enim denarium in 40 multiplices, hic numerus crescit. Horum igitur quadringentorum require tetragonum latus, hi sunt 20. Vicies enim 20, 400 efficiuntur. Repertum ergo latus quadratum, medium constituas. Vel si eam proportionem quam inter se dati termini custodiunt divides, et id quod relinquetur medium terminum ponas. Namque 40 ad denarium quadruplus est. Igitur quadruplum si divides, duplum facies, qui est scilicet 20. Nam 20 ad denarium duplus est. Hunc si medium constituas, medietatem geometricam perferet. Harmonicam vero medietatem, tali modo reperies: differentiam terminorum in minorem terminum multiplica, et post junge terminos, et juxta eum qui inde confectus est, committe illum numerum qui ex differentia et termino minore productus est. Cujus cum latitudinem inveneris, addas eam minori termino, et quod inde colligitur medium terminum pones, 10 enim et 40, 30 sunt; quem si multiplicas in denarium, id est in minorem, decies 30, oportet 300 efficias. Quos 300 juxta eum committe qui ex junctis utrisque confectus est, id est juxta 50, facient enim quinquages senos, et invenitur latitudo senarius. Hunc igitur si minori termino addas, facient 16, et hic numerus medius constitutus inter 10 et 40, harmonicam proportionem medietatemque servabit.

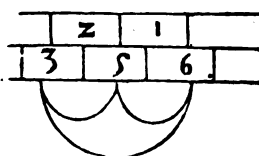
CAPUT LI.

De tribus medietatibus quæ harmonica et geometrica contrariæ sunt.

Hæ quidem sunt apud antiquiores inventæ probatæque medietates, quas idcirco longius enodatusque tractavimus, quod hæ maxime in antiquorum lectionibus inveniuntur, et ad omnem pene vim co-

gnitionis eorum versatur utilitas. Cæteras autem prætereundo transcurrimus, idcirco quod non multum nobis in lectionibus prosunt, sed tantum ad implendam denarii numeri quantitatem. Quæ, ne lateant neve sint aliquibus ignoratæ, depromimus. Videntur enim hæ supradictis medietatibus esse contrariæ, ex quibus originem trahunt. Ex his enim etiam istæ sunt constitutæ. Est autem quarta medietas quæ opposita videtur harmonicæ, in qua tribus terminis positis, quemadmodum est maximus terminus ad parvissimum, sic differentia minorum ad differentiam maximorum. Ut sunt 3, 5, 6, sex ad ternarium duplus. Et sunt minores 5 et 3, maximi vero hujus dispositionis 6 et 5. Differentia vero minorum, quinarum scilicet et ternarii 2 sunt, majorum, quinarum et ternarii, 1, qui 2 ad unum comparati duplum faciunt. Ergo quemadmodum est maximus terminus ad parvissimum, sic minorum terminorum differentia est ad differentiam maximorum.

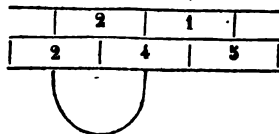
Differentiæ duplæ.



Termini extremi dupli.

Liquet autem oppositam et quodammodo contrariam esse hanc medietatem harmonicæ medietati, idcirco quod in illa quemadmodum est maximus terminus ad parvissimum, sic majorum terminorum differentia ad differentiam minorum. Hic autem e contrario. Est autem proprium hujus medietatis, quoniam quod continetur sub maximo termino et medio duplum est eo quod continetur sub medio atque parvissimo; sexies enim quinque 30 sunt, quinquies vero tres 15. Dux vero aliæ medietates, quinta scilicet et sexta, geometricæ medietati contrariæ sunt, et eidem videntur oppositæ. Est autem quinta medietas, quotiens in tribus terminis, quemadmodum est medius terminus ad minorem terminum, ita eorum differentia ad differentiam medii atque majoris. Nam in hac dispositione 2, 4, 5, quaternarius ad binarium duplus est; sed inter quaternarium et binarium duo sunt, inter quaternarium vero et majorem terminum, id est quinque, 1, et duo ad unum dupli sunt.

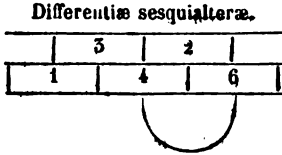
Differentiæ duplæ.



Numeri dupli.

Contrarium autem geometricæ medietati in hac proportione est, quod in illa quemadmodum major terminus ad minorem esset, sic majorum differentia ad differentiam minorum. Hic vero contrarie, quemadmodum minores ad se termini sunt, sic minorum differentia terminorum ad majorum differentiam comparatur. Est autem proprium in hac quoque disposit-

atione, quod illud quod continetur sub majore termino et medietate duplum est, eo quod sub utrisque extremitatibus continetur. Nam quinquies quatuor sunt 20, quinquies vero 2 sunt 10, et 20 denarii duplus est. Sexta vero medietas est quando tribus terminis constitutis, quemadmodum est major terminus ad medium, sic minorum terminorum differentia ad differentiam maximorum. In dispositione enim quæ est 4, 4, 6, maximus terminus ad medium sesquialter est, differentia vero minorum, id est unius et 4, ternarius est, majorum vero, id est quaternarii et senarii, binarius.

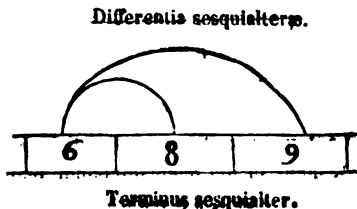


Ternarius autem binario comparatus, sesquialteram habitudinem proportionis efficit. Eodem autem modo hæc quoque medietas geometricæ contraria est, quemadmodum et quinta propter proportionem differentiarum a minoribus ad majores terminos conversam.

CAPUT LII.

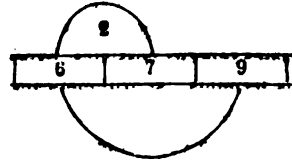
De quatuor medietatibus quæ postori ad impensam denarium limitem adjecterunt.

Et hæc quidem sunt sex medietates, quarum tres a Pythagora usque ad Platonem Aristotelemque manserunt. Post vero qui insecuti sunt, has tres alias, de quibus supra discernimus, suis commentariis addidit. Sequens autem ætas, quemadmodum diximus, ad implendam denarium quantitatem, alias quatuor medietates apposuit, quas non adeo quis in veterum libris inveniat. Has igitur nos quam possumus brevissime disponamus. Prima enim quæ est earum, in ordine vero septima medietas, hoc modo conjungitur, cum in tribus terminis, quemadmodum est maximus terminus ad ultimum, sic maximi et parvissimi termini differentia, ad minorum differentiam terminorum, ut in hac dispositione 6, 8, 9. Novenarius igitur ad senarium sesquialter est, quorum est differentia ternarius. Minorum vero terminorum, id est octonarii et senarii, binarius differentia est, qui ad superiorem ternarium comparatus, facit sesquialteram proportionem.

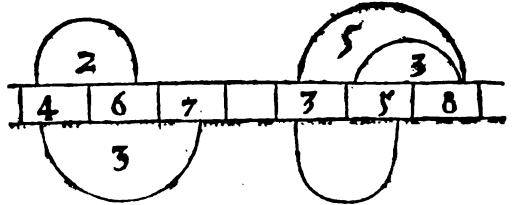


Secunda vero inter quatuor, sed octava in ordine proportionalitas est, quotiens in tribus terminis, quemadmodum sunt extremitates ad se invicem comparatæ, sit eorum differentia ad majorum termino-

rum differentiam, ut sunt 6, 7, 9. Novem igitur ad 6 sesquialter est, et eorum differentia ternarius est, qui comparatus contra majorum differentiam, id est septenarii et novenarii, qui binarius est, reddit sesquialteram proportionem.



Tertia vero inter has sequentes quatuor, nona autem in ordine proportio est, quando tribus terminis positis, quam proportionem medius terminus ad parvissimum custodit, eam velmet extremorum differentia ad minorum differentiam comparata, ut 4, 6, 7. Etiam 6 ad 4 sesquialter est, quorum est differentia binarius; septenarii vero et quaternarii, ternarius differentia est, quem si ad superiorem binarium comparemus, sesquialtera proportione conjungitur.



Quarta vero, quæ in ordine decima est, consideratur in tribus terminis, cum tali proportione medius terminus ad parvissimum comparatur, quali extremorum differentia contra majorum terminorum differentiam proportione conjungitur, ut sunt tres, quinque, octo. Quinarius enim medius terminus, ad ternarium superbipartitus est. Extremorum vero differentia, octonarii scilicet et ternarii, quiparius, qui comparatus contra majorum terminorum differentiam, scilicet quinarii et octonarii, qui est ternarius, et ipse quoque superbipartitus invenitur.

CAPUT LIII.

Dispositio decem medietatum.

Disponamus igitur cunctas medietates in ordinem, ut ejusmodi omnes sint, facillime possint intelligi.

Arithmetica	Prima	1	2	3
Geometrica	Secunda	1	2	4
Harmonica	Tertia	3	4	6
Contraria harmonica	Quarta	3	5	6
Contraria geometrica	Quinta	2	4	5
Contraria arithmetica	Sexta	4	4	6
Inter 4 prima	Septima	6	8	9
Inter 4 secunda	Octava	6	7	9
Inter 4 tertia	Nonæ	4	6	7
Inter 4 quarta	Decima	5	5	8

CAPUT LIV.

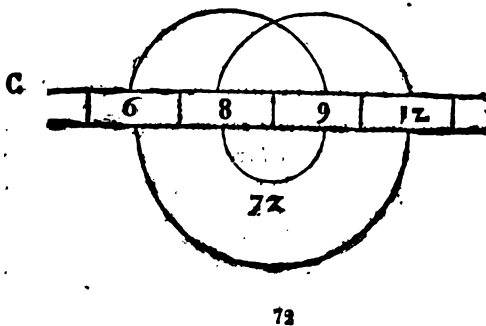
De maxima et perfecta symphonia, quæ tribus distenditur intervallis.

Restat ergo de maxima perfecta que harmonia dis-

serere, quæ tribus intervallis constituta, magnam vim obtinet in musici modulaminis temperamentis et in speculatione naturalium questionum. Etenim perfectius hujusmodi medietate nihil poterit inveniri, quæ tribus intervallis producta, perfectissimi corporis naturam substantiamque sortita est. Hoc enim modo, cubum quoque trina dimensione crassatum, plenam harmoniam esse monstravimus. Hæc autem hujusmodi invenietur, si duobus terminis constitutis, qui ipsi tribus breverint intervallis, longitudine, latitudine et profunditate, duo hujusmodi termini medii fuerint constituti, et ipsi tribus intervallis notati, qui vel ab æqualibus per æquales æqualiter sint producti, vel ab inæqualibus ad inæqualia æqualiter, vel ab inæqualibus ad æqualia æqualiter, vel quolibet alio modo, atque ita cum harmonicam proportionem custodiant, alio tamen modo comparati, faciunt arithmeticam medietatem, hisque geometrica medietas, quæ inter utraque versatur, deesse non possit. In quatuor enim terminis si fuerit, quemadmodum primus ad secundum, sic tertius ad quartum, proportionum ratione scilicet custodita, geometrica medietas explicatur. Et quod continetur sub extremitatibus æquum erit ei quod sub utraque medietate ad se invicem multiplicata conficitur. Rursus, si maximus quatuor terminorum numerus ad eum qui sibi propinquus est talem habeat differentiam, qualem idem esse maximo propinquus ad parvissimum, hujusmodi proportio in arithmetica consideratione proponitur. Et extremorum conjunctio duplex erit propria medietate. Si vero inter quatuor qui est tertius terminus, a qua parte quarti, quartum terminum superet, et æqua primi a primo superetur, harmonica hujusmodi proportio medietasque perspicitur: et quod continetur sub extremorum aggregatione et multiplicatione medietatis, duplex est eo quod sub utraque extremitate conficitur. Sit autem quoddam hujus dispositionis exemplar hoc modo, 6, 8, 9, 12. Has igitur omnes solidas quantitates esse non dubium est. Sex enim nascuntur ex uno bis ter, 12 autem ex bis duo ter. Horum autem medietates, octonarius fit semel duo quater. Novenarius vero semel tres ter. Omnes igitur termini cognati sibi, et tribus intervallorum dimensionibus notati sunt. In his igitur geometrica proportionalitas invenitur, si 12 ad 8 vel 9 ad 6 comparemus. Utraque enim comparatio sesquialtera proportio est, et quod continetur sub extremitatibus idem est ei quod fit ex mediis. Namque quod fit ex duodecies 6, æquum est ei quod fit ex octies 9: geometrica ergo proportio hujusmodi est; arithmetica autem est, si duodenarius ad novenarium, et novenarius ad senarium comparetur. In utrisque enim ternarius differentia est, et junctæ extremitates medietate duplæ sunt. Si enim junxeris senarium et duodecim facies 18, qui est novenario medio termino duplus. In his ergo geometricam arithmeticamque medietatem perspeximus. Hic quoque harmonica medietas invenitur, si 12 ad 8 et rursus 8 ad 6 comparemus. Qua enim parte senarii

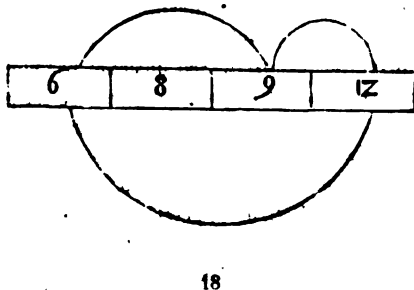
octonarius senarium superat, id est parte tertia, eadem duodenarii parte, octonarius superatur. Quatuor enim quibus octonarius a duodenario vincitur, duodenarii tertia pars est. Et si extremitates jungas 6 scilicet et 12, easque per octonarium medium multiplices, 144 sunt. Quod si se extremitates multiplicent, sex scilicet et 12, faciunt 72, quo numero 144 duplus est. Invenimus hic quoque omnes musicas consonantias. Namque 8 ad 6 et 9 ad 12 comparati sesquiterciam proportionem reddunt, et simul diatessaron consonantiam. Sex vero ad 9 vel 8 ad 12 comparati, reddunt sesquialteram proportionem, sed diapente symphoniam. Duodecim vero ad senarium considerati duplicem proportionem, sed diapason symphoniam canunt. Octo vero et 9 ipsi contra se medii considerati, epogdoun jungunt, qui in musico modulamine tonus vocatur, quæ omnium musicorum sonorum mensura communis est. Omnium enim est sonus iste parvissimus. Unde notum est quod diatessaron et diapente consonantiarum, tonus differentia est, sicut inter sesquiterciam et sesquialteram proportionem sola est epogdous differentia. Ejus autem descriptionis, subter exemplar adjecimus

Proportionalitas geometrica.
Sesquialtera proportiones.



Extremorum mediorumque multiplicationes.

Proportionalitas arithmetica.
Differentiæ æquales.



Extremitates junctæ ad novenarium medium duplæ sunt.

